Luigi Stagni

GUIDA ALLA SOLUZIONE DEI PROBLEMI DI FISICA

MECCANICA - TERMODINAMICA

189 problemi d'esame interamente risolti

Seconda Edizione

ACCADEMICA

Prof. Luigi Stagni
Università degli Studi di Roma Tre
Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Industriale

Copyright © 2004 by Accademica S. r. l., Roma
Quest'opera è soggetta a copyright. I diritti di traduzione, di memorizzazione elettr-nica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

Sito web: www.accademica.it

e-ISBN 978-88-85929-66-1

Stagni, Luigi - Guida alla soluzione dei problemi di Fisica

INDICE

PRIMA DI INIZIARE 1

A. CINEMATICA 3
- A1. Gli elementi del moto. Grandezze cinematiche. 3
  - Formule 3
  - Problemi 4
- A2. Moti notevoli 13
  - Formule 13
  - Problemi 15
- A3. Moti relativi. 42
  - Formule 42
  - Problemi 43

B. DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE 57
- B1. Lavoro ed energia. 57
  - Formule 57
  - Problemi 59
- B2. Forze notevoli 71
  - Formule 71
  - Problemi 73
- B3. Forze apparenti 105
  - Formule 105
  - Problemi 106

C. MECCANICA DEI SISTEMI 119
- C1. Equazioni cardinali. Lavoro ed energia. Urti. 119
  - Formule 119
  - Problemi 121
- C2. Meccanica dei sistemi rigidi 142
  - Formule 142
  - Problemi 144
- C3. Statica dei fluidi. 179
  - Formule 179
  - Problemi 180
- C4. Elasticità e onde elastiche. 195
  - Formule 195
  - Problemi 197

D. TERMODINAMICA 209
D1. Temperatura e Primo Principio 209
Formule 209
Problemi 212
D2. Entropia 246
Formule 246
Problemi 248
D3. Macchine termiche 273
Formule 273
Problemi 274

Prima di Iniziare

Lo scopo principale del presente libro è di guidare gli studenti del primo anno dei corsi di laurea in Ingegneria e in Fisica all'acquisizione di un metodo per la soluzione dei problemi d'esame di Fisica. L'esperienza mostra, infatti, che a determinare buona parte degli insuccessi non è la mancanza di doti naturali e di impegno, ma la difficoltà ad individuare la struttura del procedimento di soluzione.

Questa raccolta presenta parte dei problemi assegnati nelle prove scritte dell'esame di Fisica I della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma "La Sapienza" negli anni dal 1989 al 1992, e della Facoltà di Ingegneria della Terza Università di Roma dall'anno 1993 in poi. Per la soluzione viene seguito uno schema che si basa sulla separazione esplicita del procedimento nei seguenti due passi.

1. Traduzione: l'enunciato del problema è tradotto in linguaggio matematico, cioè in equazioni che legano le grandezze incognite alle grandezze date. È il passo più importante per la valutazione in sede di prova d'esame. Infatti, al fine di attuare una traduzione corretta occorre conoscere bene le leggi della fisica e le loro conseguenze.

2. Calcolo: le equazioni scritte sono elaborate in modo da ricavare le grandezze incognite. Questo passo richiede le opportune conoscenze di matematica (per esempio, essere in grado di calcolare derivate e integrali). Il calcolo conduce al *risultato*, cioè ad una o più formule (incorniciate nel presente testo) che esprimono le grandezze incognite in funzione delle grandezze date.

È importante comprendere che il risultato deve esprimersi in formule algebriche, non in valori numerici. Una formula, oltre a consentire il *controllo dimensionale*, si presta ad essere discussa (in particolare, per stabilire entro quali limiti il risultato è fisicamente accettabile) e mostra come una grandezza dipende dalle altre. Solo successivamente si calcoleranno i valori numerici delle grandezze incognite (quando richiesti dal problema).

Si assume che lo studente abbia assimilato in precedenza gli argomenti riguardanti i problemi che si accinge ad affrontare. Tuttavia, all'inizio di ogni sezione sono richiamate le formule da utilizzare per la prima volta. Nell'ambito di ogni sezione i problemi sono generalmente ordinati per argomenti e per difficoltà crescente.

Nel muovere i primi passi, lo studente cercherà di risolvere il singolo problema seguendo il procedimento per lui più naturale. Quindi, riscriverà la sua soluzione seguendo lo schema proposto sopra, in particolare separando la fase di traduzione dalla fase di calcolo ed evitando di operare con i valori numerici. Solo a questo punto opererà il confronto con la soluzione riportata nel presente volume.

Buon lavoro!

Roma, novembre 1994

L. Stagni

A. CINEMATICA

A1. Gli elementi del moto. Grandezze cinematiche.

Nei problemi che seguono la traiettoria del punto mobile è sempre contenuta in un piano, che riferiremo ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy. Se $\vec{r} \equiv (x, y)$ è il vettore posizione del punto mobile (raggio vettore) e t è il tempo, il moto è descritto dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

In particolare, da queste si possono ricavare l'equazione cartesiana della traiettoria, $y = y(x)$, e la legge oraria $s = s(t)$, essendo s l'ascissa curvilinea sulla traiettoria.

Formule

- Componenti cartesiane della velocità:

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}(t), \qquad \mathrm{v}_y = \dot{y}(t) \tag{A1.1}$$

dove il punto indica la derivata prima rispetto al tempo.

- Velocità scalare:

$$\mathrm{v}(t) = \dot{s}(t). \tag{A1.2}$$

- Componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$a_x = \dot{\mathrm{v}}_x = \ddot{x}(t), \qquad a_y = \dot{\mathrm{v}}_y = \ddot{y}(t). \tag{A1.3}$$

- Componenti tangenziale e normale dell'accelerazione:

$$a_\tau = \dot{\mathrm{v}}(t) = \ddot{s}(t), \qquad a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} \tag{A1.4}$$

dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria.

Problemi

A1-1 In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy un moto piano è descritto dalle seguenti equazioni parametriche

$$x(t) = A\cos\omega t, \qquad y(t) = A\sin\omega t$$

dove A e ω sono costanti positive. Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria e la legge oraria del moto.

Traduzione

L'equazione cartesiana della traiettoria si ottiene dalle equazioni parametriche eliminando il tempo. La legge oraria si può ottenere dalla formula (A1.2) dopo aver utilizzato le formule (A1.1) per ricavare la velocità scalare:

$$\mathrm{v}(t) = \pm\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2}\,. \tag{a}$$

Calcolo

Elevando al quadrato le equazioni del testo e sommando membro a membro otteniamo

$$x^2 + y^2 = A^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)$$

cioè, in base alla formula fondamentale dalla trigonometria:

$$\boxed{x^2 + y^2 = A^2}.$$

Perciò, la traiettoria è una circonferenza di raggio A e centro nell' origine. Considerando le formule (A1.1) abbiamo, poi:

$$\mathrm{v}_x = \dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t, \qquad \mathrm{v}_y = \dot{y}(t) = A\omega\cos\omega t$$

da cui, sostituendo in (a),

$$\mathrm{v}(t) = A\omega$$

(per la scelta del segno, si è considerato come positivo il verso di percorrenza antiorario). Utilizzando, infine, la formula A(1.2) si ottiene

$$\boxed{s(t) = \int \mathrm{v}(t)dt = A\omega t + s_0}$$

dove s_0 è la costante di integrazione (ascissa iniziale). In conclusione, le equazioni proposte dal problema sono le equazioni parametriche di un moto circolare uniforme di raggio A e velocità angolare ω.

A1-2 Una particella si muove di moto piano con accelerazione $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, essendo ω una costante positiva e $\vec{r}$ il raggio vettore rispetto all'origine di un sistema di assi cartesiano ortogonale Oxy. All'istante iniziale la particella si trova nel punto di coordinate $(0, y_0)$ con velocità v_0 parallela all'asse x. Scrivere l'equazione cartesiana della traiettoria.

Traduzione

Proiettando l'equazione vettoriale del testo sugli assi coordinati e considerando le formule (A1.3) si ottengono le equazioni differenziali

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y \tag{a}$$

da risolvere tenendo conto delle condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad \dot{x}(0) = v_0, \qquad \dot{y}(0) = 0. \tag{b}$$

Calcolo

Le soluzioni delle equazioni (a) possono scriversi

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad y(t) = B\sin(\omega t + \beta)$$

(si può giungere rapidamente a questo risultato ricordando l'equazione caratteristica del moto armonico, v. Formule di sezione A2) dove A, B, α e β sono costanti da determinare con le condizioni (b). Poiché

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha), \qquad \dot{y}(t) = B\omega\cos(\omega t + \beta)$$

dalle (b) si ricava

$$0 = A\sin\alpha, \quad y_0 = B\sin\beta, \quad v_0 = A\omega\cos\alpha, \quad 0 = B\omega\cos\beta$$

da cui

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pi/2, \quad A = v_0/\omega, \quad B = y_0$$

e quindi

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad y(t) = y_0\cos\omega t.$$

Eliminando t da queste due ultime equazioni (si divide, rispettivamente, per v_0/ω e y_0 e quindi si eleva al quadrato, v. problema precedente), si ottiene l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$\boxed{\frac{x^2}{(v_0/\omega)^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1}.$$

La traiettoria è un'ellisse i cui assi coincidono con gli assi cartesiani; la lunghezza del seminasse x è v_0/ω e quella del semiasse y è y_0.

A1-3 L'accelerazione tangenziale a_τ di un punto mobile è legata alla velocità scalare v dalla relazione

$$a_\tau = -b\mathrm{v}^3$$

essendo b una costante positiva. Sapendo che all'istante iniziale il punto passa per l'origine delle ascisse curvilinee s con velocità scalare v_0, scrivere l'equazione della velocità scalare in funzione di s.

Traduzione

In virtù della prima formula (A1.4) e di (A1.2) abbiamo

$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{d\mathrm{v}}{ds}\cdot\mathrm{v}\,;$$

perciò, la relazione proposta dal problema può scriversi

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2} = -bds\,. \qquad \text{(a)}$$

Debbono, poi, essere soddisfatte le condizioni

$$s(t=0)=0, \qquad \mathrm{v}(t=0)=\mathrm{v}_0\,. \qquad \text{(b)}$$

Calcolo

Integrando (a) si ottiene

$$\frac{1}{\mathrm{v}} = bs + c$$

dove c è la costante di integrazione. Imponendo le condizioni iniziali (b) per determinare c, si trova $c = 1/\mathrm{v}_0$ e quindi

$$\boxed{\mathrm{v}(s) = \frac{\mathrm{v}_0}{1+b\mathrm{v}_0 s}}.$$

Per $s \gg 1/b\mathrm{v}_0$ è $\mathrm{v} \approx 1/bs$, cioè la velocità tende a zero in modo inversamente proporzionale allo spazio percorso.

A1-4 Una particella si muove di moto rettilineo con accelerazione data dalla legge temporale $a(t) = -a_0 e^{-\alpha t}$ con $a_0 = 15$ m/s^2 e $\alpha = 5.0\,\mathrm{s}^{-1}$. Sapendo che la velocità iniziale è $\mathrm{v}_0 = 3.0$ m/s, calcolare dopo quanto tempo la velocità della particella si riduce a $\varepsilon\,\mathrm{v}_0$, con $\varepsilon = 0.30$.

Traduzione

Poiché nel moto rettilineo l' accelerazione è tutta tangenziale, per la prima delle (A1.4) abbiamo

$$d\mathrm{v} = -a_0 e^{-\alpha t}\,dt\,. \qquad \text{(a)}$$

Inoltre, devono essere verificate le condizioni

$$\mathrm{v}(0) = 0, \qquad \mathrm{v}(t_1) = \varepsilon\,\mathrm{v}_0\,. \qquad \text{(b)}$$

Calcolo

Integrando (a), e determinando la costante di integrazione mediante la prima delle (b), si ottiene

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 - \frac{a_0}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Risolvendo rispetto a t e imponendo la seconda delle (b) si ha, infine

$$\boxed{t_1 = -\frac{1}{\alpha}\ln\left[1 - (1-\varepsilon)\frac{\alpha\,\mathrm{v}_0}{a_0}\right]}.$$

Poiché l' argomento del logaritmo deve essere positivo, si deduce la seguente condizione per la risolvibilità del problema: $a_0 > (1-\varepsilon)\alpha\,\mathrm{v}_0$ (questa condizione esprime il fatto che la velocità all'istante t_1 deve essere superiore alla velocità limite $\mathrm{v}_0 - a_0/\alpha$).

Risultato numerico: $t_1 = 0.24$ s.

A1-5 L'accelerazione di un veicolo che, partendo da fermo, si muove di moto rettilineo, decresce proporzionalmente alla sua velocità. Inizialmente l'accelerazione vale $a_0 = 5.0$ m/s^2 e si riduce a $a_1 = 1.0$ m/s^2 quando la velocità ha raggiunto il valore $v_1 = 30$ m/s. Calcolare il tempo t_1 richiesto per raggiungere questa velocità.

Traduzione

Poiché il moto è rettilineo abbiamo $a = a_\tau$. La condizione per cui l' accelerazione decresce proporzionalmente alla velocità è esprimibile mediante l'equazione:

$$a(t) = -b\mathrm{v}(t) + a_0, \qquad b > 0. \tag{a}$$

Si hanno, poi, le condizioni

$$\mathrm{v}(0) = 0, \qquad a(0) = a_0 \tag{b}$$

$$\mathrm{v}(t_1) = \mathrm{v}_1, \qquad a(t_1) = a_1. \tag{c}$$

Calcolo

Ponendo $t = t_1$ in (a) e tenuto conto delle (c), si ottiene

$$b = (a_0 - a_1)/\mathrm{v}_1 . \tag{d}$$

In base alla prima formula (A1.4), l'equazione (a) può scriversi

$$\frac{d\mathrm{v}}{a_0 - b\mathrm{v}} = dt ,$$

da cui, integrando

$$\ln(a_0 - b\,\mathrm{v}) = -bt + c$$

dove, tenuto conto della prima delle (b), è $c = \ln a_0$; perciò:

$$\ln\left[1 - \frac{b\mathrm{v}(t)}{a_0}\right] = -bt .$$

Infine, ponendo $t = t_1$, considerando la prima delle (c) e utilizzando (d) si ricava

$$\boxed{t_1 = \frac{\mathrm{v}_1}{a_0 - a_1} \ln \frac{a_0}{a_1}}.$$

Poiché deve essere $b>0$, la relazione (d) mostra che il problema è risolvibile solo se $a_1<a_0$.

Risultato numerico: $t_1 = 12.1$ s.

A1-6 Una particella, che si muove nel piano cartesiano Oxy, è dotata di accelerazione vettoriale a costante e parallela all'asse y. All'istante t =0 la sua velocità v_0 è parallela all'asse x. Scrivere l' espressione del raggio di curvatura della traiettoria in funzione del tempo.

Traduzione

Utilizzando le formule (A1.3) abbiamo

$$\dot{v}_x(t) = 0, \qquad \dot{v}_y(t) = a \tag{a}$$

con le condizioni iniziali

$$v_{0x} = v_0, \qquad v_{0y} = 0. \tag{b}$$

Si dovranno, poi, utilizzare le formule (A1.4); in particolare

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \tag{c}$$

essendo ρ il raggio di curvatura della traiettoria.

Calcolo

Integrando le equazioni (a), e tenuto conto di (b), si ottiene

$$v_x(t) = v_0, \qquad v_y(t) = at,$$

da cui

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{1 + (at/v_0)^2}\,.$$

Perciò, in virtù della prima delle (A1.4) si ha

$$a_\tau = \dot{v} = a\Big/\sqrt{1 + (v_0/at)^2}$$

e quindi, sostituendo in (c):

$$\boxed{\rho(t) = \frac{v_0^2}{a}\left(1 + \frac{a^2t^2}{v_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per $t >> v_0/a$ risulta $\rho \approx a^2t^3/v_0$; in particolare, con il passare del tempo il moto tende a diventare rettilineo.

A1-7 Un punto si muove nel primo quadrante di un piano cartesiano Oxy lungo l'arco di traiettoria di equazione

$$y(x) = A\sqrt{x}\,.$$

con $A = 2.00\ \mathrm{m}^{1/2}$. Il moto del punto è uniforme con velocità v = 3.00 m/s. Si determini il modulo dell'accelerazione in funzione di x e calcolarne il valore per x = 1.00 m.

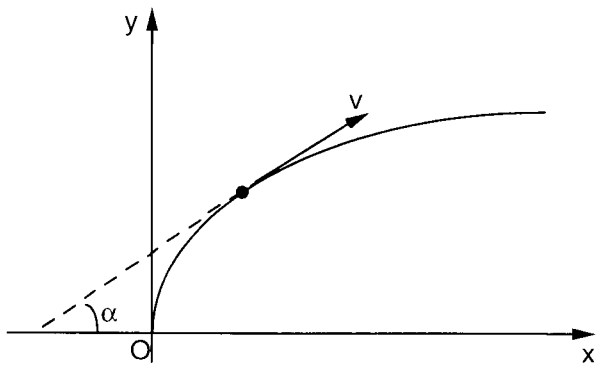
Traduzione

Considerando le formule (A1.3) possiamo scrivere

$$a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_x}{dx}\mathrm{v}_x, \qquad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_y}{dx}\mathrm{v}_x\,. \tag{a}$$

Quindi, il modulo dell'accelerazione si calcola mediante la nota formula

$$a(x) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{b}$$



Calcolo

Se α è l'angolo tra il vettore velocità e l'asse x (v. figura) abbiamo

$$\mathrm{v}_x = \mathrm{v}\cos\alpha, \qquad \mathrm{v}_y = \mathrm{v}\sin\alpha\,;$$

perciò, essendo il moto uniforme (v = cost), le equazioni (a) possono scriversi

$$a_x = \mathrm{v}^2\frac{d(\cos\alpha)}{dx}\cos\alpha, \qquad a_y = \mathrm{v}^2\frac{d(\sin\alpha)}{dx}\cos\alpha\,.$$

Esprimendo $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ mediante $\tan\alpha$ (con le note formule di trigonometria) e tenuto conto che

$$\tan\alpha = y'(x) = A/2\sqrt{x}\,,$$

dopo calcoli un po' laboriosi ma non difficili si trova

$$a_x = \frac{2\mathrm{v}^2}{A^2}\left(1+\frac{4x}{A^2}\right)^{-2}, \qquad a_y = \frac{4\mathrm{v}^2\sqrt{x}}{A^3}\left(1+\frac{4x}{A^2}\right)^{-2}.$$

Infine, sostituendo in (b) si ha il risultato richiesto:

$$\boxed{a(x) = \frac{2\mathrm{v}^2}{A^2}\left(1+\frac{4x}{A^2}\right)^{-\frac{3}{2}}}.$$

Essendo l'accelerazione solo normale (il moto è uniforme), mediante la seconda delle (A1.4) si può ricavare il raggio di curvatura della traiettoria, $\rho\,(x) = \mathrm{v}^2/a$. L'espressione che si ottiene è in accordo con la nota formula di geometria analitica.

Risultato numerico: $a(1\mathrm{m}) = 1.59\ \mathrm{m/s^2}$.

A1-8 Le componenti dell'accelerazione di una particella, in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono

$$a_x = A/x, \qquad a_y = B/y.$$

All'istante iniziale la particella passa per il punto $P_0(x_0, y_0)$ con velocità il cui modulo è v_0. Sapendo che successivamente la particella passa per il punto $P_1(x_1, y_1)$, determinare il valore del modulo della velocità in questo punto. [$A = 5.0$ m²s², $B = 3.0$ m²s², $x_0 = y_0 = 1.0$ m, $v_0 = 3.5$ m/s, $x_1 = 3.0$ m, $y_1 = 2.0$ m]

Traduzione

In base alle formule (A1.3) le relazioni proposte dal problema possono scriversi (v. anche il problema precedente)

$$v_x dv_x = A\frac{dx}{x}, \qquad v_y dv_y = B\frac{dy}{y} \tag{a}$$

con la condizione

$$v(x_0, y_0) = 0. \tag{b}$$

Inoltre abbiamo

$$v(x, y) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{c}$$

Calcolo

Integrando (a) otteniamo

$$\tfrac{1}{2}v_x^2 = A\ln x + c_x, \qquad \tfrac{1}{2}v_y^2 = B\ln y + c_y$$

da cui, sommando membro a membro e tenuto conto di (c),

$$\tfrac{1}{2}v^2 = A\ln x + B\ln y + c$$

essendo c_x, c_y e $c = c_x + c_y$ costanti di integrazione. Infine, imponendo la condizione iniziale (b) si ricava $c = v_0^2/2 - A\ln x_0 - B\ln y_0$ e quindi

$$\boxed{v(x_1, y_1) = \sqrt{2\left(A\ln\frac{x_1}{x_0} + B\ln\frac{y_1}{y_0}\right) + v_0^2}}.$$

Il moto può svolgersi solo nella regione di piano definita dalle disuguaglianze $x/x_0 > 0$, $y/y_0 > 0$.

Risultato numerico: $v(x_1, y_1) = 5.2$ m/s.

A2. Moti notevoli.

Formule

- Legge oraria del moto uniforme (velocità scalare v costante):

$$s(t) = \mathrm{v}t + s_0 \qquad \text{(A2.1)}$$

dove s_0 è una costante (ascissa iniziale).

- Legge oraria del moto circolare uniforme (velocità angolare ω costante):

$$\alpha(t) = \omega t + \alpha_0 \qquad \text{(A2.2)}$$

essendo α l'angolo di rotazione e α_0 una costante (angolo iniziale). Si hanno anche le relazioni

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \qquad \text{(A2.3)}$$

essendo r il raggio della traiettoria circolare, T e ν, rispettivamente, il periodo e la frequenza del moto.

- Legge oraria del moto uniformemente accelerato (accelerazione tangenziale a_τ costante):

$$s(t) = \tfrac{1}{2}a_\tau t^2 + \mathrm{v}_0 t + s_0 \qquad \text{(A2.4)}$$

dove s_0 e v_0 sono costanti (ascissa e velocità iniziali). Inoltre, valgono le formule

$$\mathrm{v}(t) = a_\tau t + \mathrm{v}_0 \qquad \text{(A2.5)}$$

$$2a_\tau(s - s_0) = \mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_0^2 \qquad \text{(A2.6)}$$

- Legge oraria del moto armonico:

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = A\cos(\omega t + \varphi') \qquad \text{(A2.7)}$$

dove A (ampiezza), ω (pulsazione), φ (fase iniziale) e $\varphi' = \varphi - \pi/2$ sono costanti. La funzione (A2.7) è soluzione dell'equazione differenziale (*equazione caratteristica* del moto armonico)

$$\ddot{s} + \omega^2 s = 0\,. \qquad \text{(A2.8)}$$

Vale anche la relazione

$$\omega^2 s^2 + \mathrm{v}^2 = \omega^2 A^2 \qquad \text{(A2.9)}$$

essendo v la velocità scalare del punto.

- Equazioni parametriche del moto di un proiettile (asse y verticale diretto verso l'alto e velocità iniziale v_0):

$$x(t) = \mathrm{v}_{0x} t + x_0, \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2} g t^2 + \mathrm{v}_{0y} t + y_0 \qquad \text{(A2.10)}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. L'equazion

e cartesiana della traiettoria, per x_0=y_0=0, e la *gittata* G del proiettile sono rispettivamente

$$y(x) = -\frac{g}{2\mathrm{v}_{0x}^2} x^2 + \frac{\mathrm{v}_{0y}}{\mathrm{v}_{0x}} x \qquad \text{(A2.11)}$$

$$G = \frac{\mathrm{v}_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad \text{(A2.12)}$$

dove α è l'angolo di tiro (alzo).

- Equazione caratteristica del moto circolare:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{(A2.13)}$$

essendo $\vec{\omega}$ il vettore velocità angolare e $\vec{r}$ il raggio vettore con origine nel centro della circonferenza.

- Equazione caratteristica dei corpi rigidi:

$$\vec{\mathrm{v}}_P = \vec{\mathrm{v}}_\Omega + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega P} \qquad \text{(A2.14)}$$

dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare istantanea di rotazione del corpo rigido, Ω e P sono due suoi punti qualsiasi, e $\vec{\mathrm{v}}_P$ e $\vec{\mathrm{v}}_\Omega$ sono le loro rispettive velocità.

- Equazione caratteristica del moto di puro rotolamento di un disco rigido:

$$\mathrm{v}_c = \omega R \qquad \text{(A2.15)}$$

essendo v_c la velocità del centro del disco, R il suo raggio e ω la velocità angolare istantanea di rotazione intorno alla generatrice di contatto con il piano di appoggio.

Problemi

A2-1 Due automobili A e B, che viaggiano rispettivamente alle velocità $v_A = 36.0$ km/h e $v_B = 36.0$ m/s, si vengono incontro sullo stesso rettilineo a partire da una distanza $d = 2.00$ km. Se l' auto B è partita con un ritardo $t_0 = 10.0$ s rispetto ad A, determinare la posi-zione e l' istante (rispetto a quelli iniziali di A) in cui avviene l' incontro (trascurare i tempi e gli spazi percorsi nelle fasi di accelerazione).

Traduzione

Scegliamo l' asse x orientato da A a B con origine nella posizione iniziale di A. Essendo i moti delle due automobili uniformi, in base a (A2.1) le equazioni orarie possono scriversi

$$x_A(t) = v_A t, \qquad x_B(t) = -v_B t + (v_B t_0 + d)\,. \qquad \text{(a)}$$

Infatti, la costante x_0 del primo moto è chiaramente nulla, mentre per il secondo (v. espressione tra parentesi a secondo membro) essa si ricava subito dalla condizione $x_B(t_0)=d$. Inoltre, se t_1 è l' istante in cui avviene l' incontro, si deve avere

$$x_A(t_1) = x_B(t_1)\,. \qquad \text{(b)}$$

Calcolo

Esplicitando (b) mediante (a) e risolvendo rispetto a t_1 si ottiene

$$\boxed{t_1 = \frac{t_0 + d/v_B}{1 + v_A/v_B}}$$

da cui, sostituendo in (a):

$$\boxed{x_A(t_1) = x_B(t_1) = \frac{v_B t_0 + d}{1 + v_B/v_A}}.$$

Nella determinazione di t_1 le tre quantità v_A, v_B e d intervengono solo attraverso i due rapporti v_A/v_B e d/v_B.

Risultato numerico: $x(t_1) = 513$ m, $t_1 = 51.3$ s

A2-2 Il raggio del solco più esterno di un disco a 33 giri è $R = 15$ cm, mentre il raggio dell' ultimo solco inciso è pari ai 2/3 del primo. Se la distanza media tra due solchi contigui è $d = 0.30$ mm, si determini la durata Δt dell' incisione.

Traduzione

Dato che ogni solco viene letto nello stesso tempo T (periodo di rotazione del disco), e tenuto conto delle formule (A2.3), la durata dell' incisione può esprimersi come segue

$$\Delta t = nT = n/\nu \qquad \text{(a)}$$

dove n è il numero di solchi e $\nu = 33$ giri/min $= 0.55$ Hz è la frequenza di rotazione. D'altra parte, se r $(= 2R/3)$ è il raggio dell' ultimo solco, abbiamo

$$n = \frac{R - r}{d}. \qquad \text{(b)}$$

Calcolo

Sostituendo (b) in (a) si ottiene

$$\boxed{\Delta t = \frac{R}{\nu d}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}.$$

Risultato numerico: $\Delta t = 303$ s.

A2-3 Una ruota gira liberamente compiendo 2000 giri al minuto. Ad un certo istante viene azionato un freno, in modo da produrre una decelerazione angolare costante $\dot{\omega}$. Sapendo che la ruota si ferma in $t_1 = 30.0$ s, calcolare $\dot{\omega}$ e il numero di giri compiuto prima di fermarsi.

Traduzione

Il moto di un punto della superficie laterale della ruota è uniformemente decelerato. Se α è l' angolo di rotazione e $\omega = d\alpha/dt$ è la velocità angolare, dividendo le formule (A2.4) e (A2.5) per il raggio della ruota, e ricordando la relazione tra arco ed angolo al centro, possiamo scrivere

$$\alpha(t) = -\tfrac{1}{2}\dot{\omega}t^2 + \omega_0 t, \qquad \omega(t) = -\dot{\omega}t + \omega_0 \qquad (\omega_0 = 2\pi\nu_0) \qquad \text{(a)}$$

dove $\nu_0 = 2000$ giri/min è la frequenza iniziale. Inoltre, debbono verificarsi le condizioni

$$\alpha(t_1) = 2n\pi, \qquad \omega(t_1) = 0 \qquad \text{(b)}$$

dove n è il numero di giri compiuto all' istante t_1.

Calcolo

Combinando (a) e (b) e risolvendo rispetto a $\dot{\omega}$ e n si ottiene

$$\boxed{\dot{\omega} = 2\pi\nu_0/t_1, \qquad n = \tfrac{1}{2}\nu_0 t_1}.$$

Si nota che n è pari alla metà del numero di giri compiuto nel tempo t_1 in assenza di azione frenante.

Risultato numerico: $\dot{\omega} = 6.98$ rad/s^2, $n = 500$ giri.

A2-4 Due automobili A e B si muovono con velocità costante, di intensità $v_A = 90$ km/h e $v_B = 35$ km/h rispettivamente, lungo due rettifili perpendicolari che si incrociano in O (v. figura). Alle ore 12 la prima auto transita per la posizione [1] ad una distanza $d_1 = 6.0$ km da O. La seconda auto alle ore 12 e 20 minuti transita per la posizione [2] che dista $d_2 = 12$ km da O. Determinare la minima distanza tra le due auto-mobili nel loro moto.

Traduzione

In base alla formula (A2.1), le leggi orarie delle due automobili possono scriversi

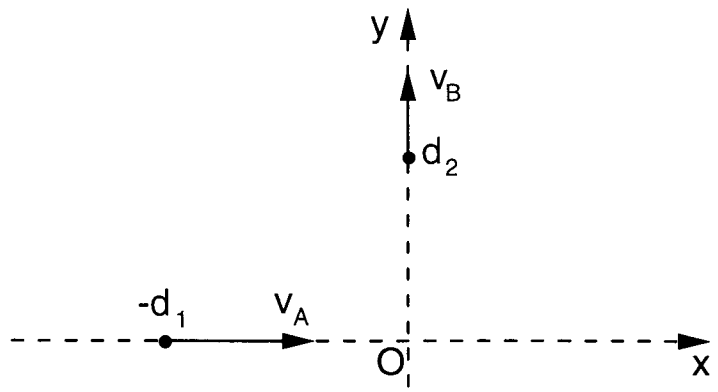
$$x_A(t) = v_A t + x_0, \qquad y_B(t) = v_B t + y_0 \tag{a}$$

dove x_0 e y_0 sono da determinare con le condizioni

$$x_A(t_1) = -d_1, \qquad y_B(t_2) = d_2, \tag{b}$$

dove $t_1 = 12^h$, $t_2 = 12^h\,20^m$. Quindi, il problema si risolve calcolando il minimo della funzione:

$$d(t) = \sqrt{[x_A(t)]^2 + [y_B(t)]^2}\,. \tag{c}$$



Calcolo

Sostituendo (a) in (c), con le note tecniche matematiche si trova che la funzione $d(t)$ è minima all' istante

$$t^* = -\frac{x_0 v_A + y_0 v_B}{v_A^2 + v_B^2},$$

da cui, sostituendo in (a):

$$x_A(t^*) = \mathrm{v}_B \frac{x_0 \mathrm{v}_B - y_0 \mathrm{v}_A}{\mathrm{v}_A^2 + \mathrm{v}_B^2}, \qquad y_B(t^*) = -\mathrm{v}_A \frac{x_0 \mathrm{v}_B - y_0 \mathrm{v}_A}{\mathrm{v}_A^2 + \mathrm{v}_B^2}.$$

Utilizzando le seguenti espressioni di x_0 e y_0

$$x_0 = -d_1 - \mathrm{v}_A t_1, \qquad y_0 = d_2 - \mathrm{v}_B t_2$$

ottenibili da (a) e (b), risulta, infine:

$$\boxed{d_{\min} = \sqrt{\left[x_A(t^*)\right]^2 + \left[y_B(t^*)\right]^2} = \frac{\left|d_1 \mathrm{v}_B + d_2 \mathrm{v}_A - \mathrm{v}_A \mathrm{v}_B \left(t_2 - t_1\right)\right|}{\sqrt{\mathrm{v}_A^2 + \mathrm{v}_B^2}}}.$$

Risultato numerico: $t_2 - t_1 = (20\text{x}60)$ s, $d_{\min} = 2.48$ km.

A2-5 Un disco di cartone (raggio R) gira a velocità angolare costante ω intorno al suo asse. Davanti al disco, lungo un diametro, è fissato un sottile righello lungo il quale viene fatta scorrere, a velocità costante v, una matita in modo che la sua punta lasci una traccia sul disco rotante (v. figura). Si determini (in funzione di R, ω e v) la distanza d tra il primo punto (A) e l' ultimo punto (B) della curva tracciata dalla punta della matita sul disco in corrispondenza di uno scorrimento pari al diametro. Assumendo R = 20 cm e v = 2.0 cm/s, calcolare i valori di ω per cui d = 0.

Traduzione

Il punto A compie un moto circolare uniforme di equazioni parametriche (v. problema A1-1)

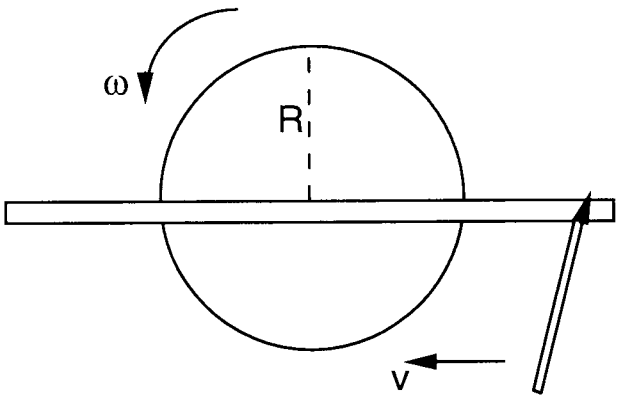
$$x_A(t) = R\cos\omega t, \qquad y_A(t) = R\sin\omega t \tag{a}$$

avendo posto l' istante iniziale quando A viene tracciato. Inoltre, poiché la punta del righello si muove di moto rettilineo uniforme, il punto B è tracciato all' istante

$$t_1 = 2R/\mathrm{v}. \tag{b}$$

Infine, se (x_B , y_B) sono le coordinate di B, la distanza richiesta è

$$d = \sqrt{\left[x_A(t_1) - x_B(t_1)\right]^2 + \left[y_A(t_1) - y_B(t_1)\right]^2}\,. \tag{c}$$



Calcolo

Tenuto conto di (a) e dei dati del problema, abbiamo

$$x_A(t_1) = R\cos\omega t_1, \qquad y_A(t_1) = R\sin\omega t_1$$
$$x_B(t_1) = -R, \qquad y_B(t_1) = 0.$$

Di conseguenza, sostituendo in (c) e riducendo, otteniamo

$$\boxed{d = R\sqrt{2\left(1+\cos\frac{2R\omega}{\mathrm{v}}\right)}}.$$

In particolare, si avrà $d = 0$ per $\cos\frac{2R\omega}{\mathrm{v}} = -1$, cioè per

$$\boxed{\omega_n = (2n+1)\frac{\pi\,\mathrm{v}}{2\mathrm{R}}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots)}.$$

Risultato numerico:

$$\omega_n = (2n+1)\frac{\pi\times 2(\mathrm{cm/s})}{2\times 20(\mathrm{cm})} = (2n+1)\times 0.157\ \mathrm{rad/s} \qquad (n = 0,1,2,\ldots).$$

A2-6 Il diametro della ruota anteriore di un biciclo è $d_A = 50.0$ cm mentre quello della ruota posteriore è $d_B = 120$ cm. Il veicolo procede su strada rettilinea orizzontale alla velocità (costante) v = 10.0 km/h e, ad un certo istante, un raggio della ruota anteriore risulta parallelo ad un altro raggio della ruota posteriore, entrambi disposti verticalmente e diretti verso l' alto. Si chiede 1) dopo quanto tempo i due raggi si ritrovano nuovamente paralleli e concordi e qual' è la loro inclinazione rispetto alla direzione di marcia; 2) dopo quanto tempo essi si ritrovano paralleli e concordi nella stessa direzione verticale iniziale.

Traduzione

Misurando gli angoli con riferimento alla direzione iniziale dei due raggi, le equazioni orarie del loro moto, sono, rispettivamente (v. formula (A2.2)):

$$\alpha_A(t) = \omega_A t, \qquad \alpha_B(t) = \omega_B t \tag{a}$$

dove per la formula (A2.13) si ha

$$\omega_A = 2\mathrm{v}/d_A, \qquad \omega_B = 2\mathrm{v}/d_B\,. \tag{b}$$

I due raggi torneranno paralleli per la prima volta quando la differenza degli angoli descritti vale un angolo giro, cioè all' istante t_1 tale che

$$|\alpha_A(t_1) - \alpha_B(t_1)| = 2\pi\ . \tag{c}$$

Infine, all' istante t_2 in cui i raggi sono ambedue nella direzione iniziale, ciascuno di essi avrà compiuto un numero intero di giri; vale a dire, se m e n sono due interi positivi:

$$\alpha_A(t_2) = 2m\pi, \qquad \alpha_B(t_2) = 2n\pi\ . \tag{d}$$

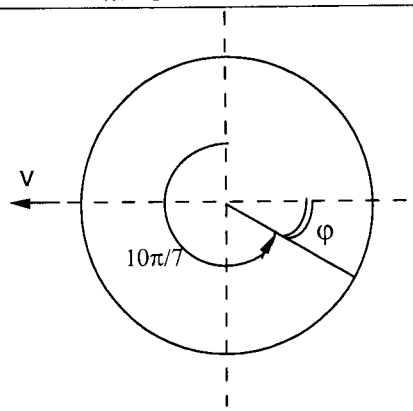
Calcolo

1) Sostituendo (a) in (c), ricavando t_1 e utilizzando (b), si ottiene

$$\boxed{t_1 = \frac{2\pi}{|\omega_A - \omega_B|} = \frac{\pi}{\mathrm{v}}\left(\frac{1}{d_A} - \frac{1}{d_B}\right)^{-1}}$$

dove, in base ai dati del problema, si è assunto $d_A < d_B$. Quindi, sostituendo questo risultato in una delle (a), e considerando (b), si ottiene l' angolo α_1 descritto nel tempo t_1 (v. figura)

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{2\pi}{1 - d_A/d_B} = \frac{24}{7}\pi = \frac{10}{7}\pi + 2\pi},$$



avendo utilizzato il dato numerico $d_A/d_B = 5/12$. L' angolo φ rispetto alla direzione di marcia è

$$\boxed{\varphi = \frac{10}{7}\pi - \frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{14}}.$$

2) Sostituendo (a) e (b) in (d) si ha

$$t_2 = \frac{m\pi}{\mathrm{v}} d_A = \frac{n\pi}{\mathrm{v}} d_B, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{m}{n} = \frac{d_B}{d_A} = \frac{12}{5}$$

e quindi

$$\boxed{t_2 = \frac{12\pi}{\mathrm{v}} d_A = \frac{5\pi}{\mathrm{v}} d_B}.$$

Risultato numerico: $t_1 = 0.97$ s, $\varphi = -12.8°$, $t_2 = 6.78$ s.

A2-7 Una piattaforma circolare di raggio R ruota in un piano orizzon-tale attorno al suo asse con un'accelerazione angolare costante $\dot{\omega}$ = 0.85 rad/s^2. Dopo un tempo t_1 = 1.00 s dalla partenza ogni punto a distanza R dal centro ha un' accelerazione totale di intensità a_1 = 1.36 m/s^2. Calcolare R.

Traduzione

Il punto considerato esegue un moto circolare; perciò, in base alla (A2.13), valgono le relazioni

$$\mathrm{v} = \omega R, \qquad \dot{\mathrm{v}} = R\dot{\omega} \ . \tag{a}$$

Essendo, poi, il moto uniformemente accelerato (con partenza all' istante t = 0), abbiamo

$$\omega(t) = \dot{\omega} t \ . \tag{b}$$

Infine, l' intensità dell' accelerazione può essere scritta

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{c}$$

essendo a_τ e a_n le componenti intrinseche dell' accelerazione date dalle formule (A1.4) (dove $\rho = R$).

Calcolo

Combinando (A1.4) con (a) e (b) si ottiene

$$a_\tau = R\dot{\omega}, \qquad a_n = R\dot{\omega}^2 t^2$$

da cui, sostituendo in (c) e ricavando R:

$$\boxed{R = \frac{a}{\dot{\omega}\sqrt{1+\dot{\omega}^2 t^4}}}.$$

Risultato numerico: R = 1.22 m.