CAPITOLO 10

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE [◊]

10.1 Equazioni differenziali del primo ordine

10.1.1 Introduzione

Definizione 10.1.1 Siano

- $k, n \in \mathbb{N}$
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$
- $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Chiamiamo *equazione differenziale di ordine* n il problema di trovare una funzione y tale che

- $y : \Omega \to \mathbb{R}$
- y è dotata in Ω di tutte le derivate fino a quelle di ordine n

[◊] A. Maceri, *Equazioni differenziali ordinarie*, e-ISBN 978-88-85929-85-2, © Accademica 2021.

incluse

- y soddisfa un'equazione in cui sono presenti y , almeno una delle sue derivate di ordine n ed il termine noto g .

Se $k = 1$ l'equazione differenziale di ordine n è chiamata *equazione differenziale ordinaria di ordine* n . ◊

Osservazione 10.1.1 Importanti esempio di equazioni differenziali alle derivate parziali (*i.e.* con $k > 1$) sono

- l'equazione di *Laplace* $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

- l'equazione del *calore* $a^2 \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \dfrac{\partial w}{\partial t}$

- l'equazione delle *onde* $a^2 \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$. ◊

Definizione 10.1.2 Sia $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che un'equazione differenziale ordinaria di ordine n è in *forma normale* se è del tipo

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

dove

$$x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

$$y \; : \quad [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y' = y^{(1)} = \frac{d}{dx} y$$

$$y^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} y$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} y \; . \; \diamond$$

Osservazione 10.1.2 In questa sezione studiamo soltanto le equazioni differenziali ordinarie di ordine 1 . ◊

Definizione 10.1.3 Ogni soluzione di una equazione differenziale è chiamata anche *integrale* (oppure *integrale particolare*) dell'equazione differenziale. ◊

Definizione 10.1.4 Se esiste un'unica espressione, in cui compare una costante arbitraria, che rappresenta tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale, chiamiamo quella espressione *integrale generale* dell'equazione differenziale. ◊

Definizione 10.1.5 Se esiste un'unica espressione, in cui compare una costante arbitraria, che rappresenta quasi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale, chiamiamo *integrale singolare* dell'equazione differenziale ogni integrale particolare che non è rappresentato dall'espressione. ◊

10.1.2 Equazioni differenziali lineari

Definizione 10.1.6 Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è detta *separabile* se può essere scritta nella forma

$$y' = f(x)h(y)\ . \quad \diamond \tag{10.1.1}$$

Osservazione 10.1.3 L'equazione differenziale ordinaria del primo ordine separabile $(10.1.1)$ può essere scritta

$$\frac{dy}{dx} = f(x)h(y)$$

da cui, separando le variabili, si trae

$$(10.1.2) \qquad \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)\,.$$

Integrando la $(10.1.2)$, si può ottenere la soluzione della $(10.1.1)$. ◊

Esempio 10.1.1 L'equazione differenziale ordinaria del primo ordine separabile sull'intervallo base $[a,b]$

$$(10.1.2) \qquad yy' = x$$

può essere scritta

$$y\frac{dy}{dx} = x$$

da cui

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right) = x\,.$$

Di conseguenza, in $[a,b]$ la funzione x ammette la primitiva $\frac{y^2}{2}$ e la primitiva $\int_a^x t\ dt = \frac{x^2}{2} + c_1$, dove $c_1 \in \mathbb{R}$. Pertanto esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c\ .$$

Quindi $y = \sqrt{x^2+2c}$ e $y = -\sqrt{x^2+2c}$ sono due soluzioni della

(10.1.2). ◊

Definizione 10.1.7 Chiamiamo *equazione differenziale ordinaria del primo ordine lineare* ogni equazione differenziale ordinaria del primo ordine in cui y e y' compaiono alla prima potenza. Pertanto, nel caso generale si scrive

$$y' + a(x)y = f(x) \tag{10.1.3}$$

dove x appartiene all'intervallo aperto Ω di $\mathbb{R}$ e le funzioni reali a, f sono definite su Ω.
La (10.1.3) è chiamata anche *equazione differenziale completa.* ◊

Definizione 10.1.8 Se il termine noto è nullo, la (10.1.3) diventa

$$y' + a(x)y = 0 \tag{10.1.4}$$

ed è chiamata *equazione differenziale omogenea associata* all'equazione differenziale completa (10.1.3). ◊

Teorema 10.1.1 *Siano*

- Ω *un intervallo aperto di* $\mathbb{R}$
- $a : \Omega \to \mathbb{R}$

- $f \,:\, \Omega \to \mathbb{R}$
- $a\,, f$ *continue*
- $x_0 \in \Omega$.

In tali ipotesi

$$(10.1.5) \qquad y = ce^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} \left[f(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz} \right] dt$$

è l'integrale generale dell'equazione differenziale completa (10.1.3).

Dimostrazione. Per dimostrare che la (10.1.5) è l'integrale generale della (10.1.3), dobbiamo provare che

1) per ogni $c \in \mathbb{R}$, la (10.1.5) è soluzione della (10.1.3)

2) se $\bar{y}$ è una qualsiasi soluzione della (10.1.3), allora esiste $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tale che la funzione a destra della (10.1.5) è eguale a $\bar{y}$.

Dimostriamo la 1).
Sia y la funzione (10.1.5), dove c è un qualsiasi numero reale. Ovviamente

$$y' = -c\, a(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

$$-a(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\int_{x_0}^{x}\left[f(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz}\right]dt+e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}f(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(z)\,dz}.$$

Pertanto, risulta

$$y'+a(x)\,y=$$

$$=-c\,a(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}-a(x)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\int_{x_0}^{x}\left[f(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz}\right]dt$$

$$+e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}f(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(z)\,dz}+a(x)\cdot c\,e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

$$+a(x)\cdot\left(e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}\int_{x_0}^{x}\left[f(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz}\right]dt\right)$$

$$=e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}f(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} a(z)\,dz}=1\cdot f(x)=f(x)$$

i.e. y è soluzione della (10.1.3).

Dimostriamo la 2).

Sia $\bar{y}$ una qualsiasi soluzione della (10.1.3), *i.e.* un qualsiasi integrale particolare della (10.1.3). Quindi $\forall\, x\in\Omega$

$$\bar{y}'+a(x)\,\bar{y}=f(x)\,. \tag{10.1.6}$$

Abbiamo visto con la 1) che, se $c \in \mathbb{R}$, la funzione y data dalla $(10.1.5)$ è soluzione della $(10.1.3)$ e quindi è tale che

$$y' + a(x)\, y = f(x)\,. \tag{10.1.7}$$

Quindi la funzione $y_1 = \bar{y} - y$ è tale che $\forall\, x \in \Omega$

$$y_1' + a(x)\, y_1 = 0\,, \tag{10.1.8}$$

i.e. è soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata.
Dalla $(10.1.8)$ otteniamo

$$\frac{y_1'}{y_1} = -a(x)\,,$$

quindi

$$\frac{d}{dx}\log y_1 = -a(x)\,,$$

quindi la funzione $-a(x)$ ammette la primitiva $\log y_1$ e la primitiva $\int_{x_0}^{x} -a(t)dt$, quindi esiste $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\log y_1 = -\int_{x_0}^{x} a(t)dt + c_1\,,$$

quindi

$$y_1 = e^{c_1}\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

quindi

$$\bar{y} - y = y_1 = e^{c_1}\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

quindi

$$\bar{y} = y + e^{c_1}\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

$$= c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} \left[f(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz} \right] dt + e^{c_1}\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

quindi il numero reale $\bar{c} = c + e^{c_1}$ è tale che

$$\bar{y} = \bar{c} e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} \left[f(t)\, e^{\int_{x_0}^{t} a(z)\,dz} \right] dt\,. \quad \diamond$$

Teorema 10.1.2 *Siano*

- Ω *un intervallo aperto di* $\mathbb{R}$
- $a : \Omega \to \mathbb{R}$
- a *continua*
- $x_0 \in \Omega$.

In tali ipotesi

(10.1.9) $$y = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt}$$

è l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea (10.1.4).

Dimostrazione. Si tratta del caso particolare $f = 0$ del teorema 10.1.1. ◊

Osservazione 10.1.4 Siano

- Ω un intervallo aperto di $\mathbb{R}$
- $p : \Omega \to \mathbb{R}$
- $q : \Omega \to \mathbb{R}$
- p , q continue
- $m \in \mathbb{R}$.

L'equazione differenziale del primo ordine su Ω

(10.1.10) $$y' + p(x)\, y + q(x)\, y^m = 0\,,$$

detta *equazione di Bernouilli*, è non lineare, ma può essere ricondotta ad un'equazione lineare.
Infatti, dalle (10.1.10) segue

$$y'y^{-m} + p(x)\, y^{1-m} + q(x)\, y^m = 0$$

e quindi, ponendo

$$u = y^{1-m}$$

si ha

$$u' = (1-m)y^m y'.$$

In tal modo, la $(10.1.10)$ diventa l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{u'}{1-m} + p(x)u + q(x) = 0$$

alla quale possiamo applicare il teorema 10.1.1. ◊

Osservazione 10.1.5 Siano

- Ω un intervallo aperto di $\mathbb{R}$
- $p : \Omega \to \mathbb{R}$
- $q : \Omega \to \mathbb{R}$
- $r : \Omega \to \mathbb{R}$
- p, q, r continue.

L'equazione diifferenziale del primo ordine su Ω

$$(10.1.11) \qquad y' + p(x)\, y + q(x)\, y^2 + r(x) = 0\,,$$

detta *equazione di Riccati* , è non lineare. Se ne è nota una soluzione, la (10.1.11) può essere trasformata in un'equazione differenziale lineare. Infatti, sia y_1 tale che

$$(10.1.12) \qquad y_1' + p(x)\, y_1 + q(x)\, y_1^2 + r(x) = 0\,.$$

Poniamo

$$u = \frac{1}{y - y_1}\quad ,$$

quindi

$$y = y_1 + \frac{1}{u}\quad ,$$

quindi

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}\,,$$

quindi la (10.1.11) diventa

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} + p(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + q(x)\left(y_1^2 + \frac{1}{u^2} + 2\frac{y_1}{u}\right) + r(x) = 0\,,$$

i.e.

$$-\frac{u'}{u^2} + p(x)\,\frac{1}{u} + 2y_1\,q(x)\,\frac{1}{u} + [y_1' + p(x)\,y_1 + q(x)\,y_1^2 + r(x)] = 0,$$

i.e., tenendo conto della (10.1.12)

$$u' + [p(x) + 2y_1 q(x)]u + q(x) = 0\,,$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine lineare, alla quale si può applicare il teorema 10.1.1. ◊

10.2 Equazioni differenziali di ordine $n > 1$

10.2.1 Introduzione

Definizione 10.2.1 Sia

$$y^{(n)} = F\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)\,, \tag{10.2.1}$$

su un qualsiasi intervallo aperto Ω di $\mathbb{R}$, una equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale. Chiamiamo *problema con condizioni al contorno* (oppure *problema con condizioni iniziali*) il problema di trovare funzioni y soddisfacenti

- la $(10.2.1)$ su Ω

- le condizioni assegnate sul contorno $\partial\Omega$ di Ω oppure in uno o più punti di Ω . ◊

Osservazione 10.2.1 Il più importante problema con condizioni iniziali è il seguente *problema di Cauchy*

- *Trovare una funzione reale* y *definita in* Ω *, dotata in* Ω *di derivate almeno fino a quelle di ordine* n *e tale che*

$$
\begin{aligned}
& y^{(n)} = F\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big) \qquad su \quad \Omega \\
& y(x_0) = z_0 \in \mathbb{R} \\
& y'(x_0) = z_1 \in \mathbb{R} \\
& \;\dots \\
& y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1} \in \mathbb{R} \ ,
\end{aligned}
$$

dove $x_0 \in \Omega$.

In opportune ipotesi su F , un teorema stabilisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di *Cauchy*. ◊