CAPITOLO 4

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE ◊

4.1 Successioni di numeri reali

4.1.1 Successioni regolari

Definizione 4.1.1 Una *successione in* $\mathbb{R}$ (o *successione numerica*) è una funzione x che trasforma l'insieme degli interi positivi $\mathbb{N}$ nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Per qualsiasi successione x, scriveremo x_n anziché $x(n)$ per indicare il valore di x in n. Il numero reale x_n è chiamato *termine* n*-esimo* della successione. La successione x il cui termine n-esimo è x_n sarà denotata con

$$x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

o semplicemente $\{x_n\}$. ◊

Teorema 4.1.1 *L'unico punto di accumulazione per* $\mathbb{N}$ *è il simbolo* $+\infty$.

◊ A. Maceri, *Successioni e Serie numeriche*, e-ISBN 978-88-85929-79-1, © Accademica 2021

Dimostrazione. Dal teorema 3.1.9 segue che nessun numero reale è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$. Dal teorema 3.2.1 segue che il simbolo $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$. Infine, dal teorema 3.2.2 segue che il simbolo $-\infty$ non è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$. ◊

Definizione 4.1.2 Siano $\{x_n\}$ una successione di numeri reali, $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Diciamo che $\{x_n\}$ è una *successione regolare*, o che $\{x_n\}$ *ha limite* l *quando* n *diverge positivamente*, o che $\{x_n\}$ *ha limite* l *quando* n *tende a* $+\infty$, e scriviamo

(4.1.1) $$\lim_{n\to+\infty} x_n = l$$

se

(4.1.2) $$\forall I_l \quad \exists\, J_{+\infty} \;\; : \quad (\, n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \;\Rightarrow (x_n \in I_l)$$

i.e., se per ogni intorno I_l di l esiste un intorno $J_{+\infty}$ del simbolo $+\infty$ tale che se l'indice n appartiene a $J_{+\infty}$, allora il termine x_n della successione appartiene all'intorno I_l.

Se $\{x_n\}$ è una successione regolare e $l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{x_n\}$ è *convergente*, o che $\{x_n\}$ *converge a* l.

Se $\{x_n\}$ è una successione regolare e $l = +\infty$, diciamo che $\{x_n\}$ è *divergente positivamente*, o che $\{x_n\}$ *diverge positivamente.*

Se $\{x_n\}$ è una successione regolare e $l = -\infty$, diciamo che $\{x_n\}$ è *divergente negativamente*, o che $\{x_n\}$ *diverge negativamente.* ◊

Definizione 4.1.3 Chiamiamo *successione infinitesima* una successione $\{x_n\}$ di numeri reali che converge a zero. ◊

Teorema 4.1.2 *Sia* $\{x_n\}$ *una qualsiasi successione di numeri reali, convergente al numero reale* l. *Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti*

1) $\forall I_l \quad \exists\, J_{+\infty} \ : \quad (n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \Rightarrow (x_n \in I_l)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)$.

Dimostrazione. 1) ⇒ 2). Supponiamo vera la 1). Sia ε un qualsiasi numero reale positivo. Quindi, come evidenziato nella osservazione 3.2.3, $I_l =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ è un intorno di l. Quindi, in virtù dell'ipotesi, esiste un intorno $J_{+\infty}$ del simbolo $+\infty$ tale che $(n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \Rightarrow (x_n \in I_l)$. Quindi, per la definizione 3.2.2, esiste un numero reale a tale che $J_{+\infty} =]a, +\infty[$. Quindi $(n \in \mathbb{N} \cap]a, +\infty[) \Rightarrow (x_n \in I_l)$. Quindi $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > a) \Rightarrow (x_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[)$. Per il teorema 1.2.4 (*proprietà Archimedea di* ℝ), esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\nu > a$. Quindi, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica $x_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, quindi $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$. Pertanto, la 2) è vera.

2) ⇒ 1). Supponiamo vera la 2). Sia I_l un qualsiasi intorno di l. Quindi, per la definizione 3.1.8, I_l è un sottoinsieme aperto di ℝ tale che

$l \in I_l$. Quindi, per le definizioni 3.1.5 e 3.1.7, esiste $\varepsilon \in]0, +\infty[$ tale che $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subseteq I_l$. Quindi, in virtù dell'ipotesi, $\exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)$. Ponendo $J_{+\infty} =]\nu, +\infty[$, per la definizione 3.2.2 otteniamo che $J_{+\infty}$ è un intorno del simbolo $+\infty$. Sia $n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}$. Quindi $n \in \mathbb{N}$ e $n > \nu$. Quindi, in virtù dell'ipotesi, $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$, quindi $x_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\subseteq I_l$. Pertanto, la 1) è vera. ◊

Osservazione 4.1.1 Per la (1.2.8), nella dichiarazione 2) del teorema 4.1.2 la diseguaglianza

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$

è equivalente a

$$|x_n - l| < \varepsilon \,.$$

Infatti, se $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$ allora $-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$, quindi, per la (1.2.8), $|x_n - l| < \varepsilon$. Se $|x_n - l| < \varepsilon$ allora, per la (1.2.8), $-\varepsilon < x_n - l < \varepsilon$; quindi $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$. ◊

Teorema 4.1.3 *Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione di numeri reali, divergente positivamente. Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti*

1) $\forall\, I_{+\infty} \quad \exists\, J_{+\infty} \;:\; (n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \Rightarrow (x_n \in I_{+\infty})$

2) $\forall\; k > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (x_n > k)$.

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 2). Supponiamo vera la 1). Sia $k > 0$. Allora, l'insieme $I_{+\infty} =]k, +\infty[$ è un intorno del simbolo $+\infty$. Quindi, per ipotesi, esiste un intorno $J_{+\infty}$ del simbolo $+\infty$ tale che $(n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \Rightarrow (x_n \in I_{+\infty})$. Quindi, per la definizione 3.2.2, esiste un numero reale a tale che $J_{+\infty} =]a, +\infty[$. Per il teorema 1.2.4 (*proprietà Archimedea di* $\mathbb{R}$), esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\nu > a$. Quindi, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica $x_n \in I_{+\infty} =]k, +\infty[$. Pertanto, la 2) è vera.

2) $\Rightarrow$ 1). Supponiamo vera la 2). Sia $I_{+\infty}$ un qualsiasi intorno del simbolo $+\infty$. Quindi, per la definizione 3.2.2, esiste un numero reale a tale che $I_{+\infty} =]a, +\infty[$. Ovviamente, esiste un numero reale positivo k tale che $k > a$, quindi $]k, +\infty[\subseteq I_{+\infty}$. Poiché $k > 0$, per ipotesi $\exists\, \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (x_n > k)$. Ponendo $J_{+\infty} =]\nu, +\infty[$, per la definizione 3.2.2 otteniamo che $J_{+\infty}$ è un intorno del simbolo $+\infty$. Sia $n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}$, quindi $n \in \mathbb{N}$ e $n > \nu$, quindi $x_n > k$, quindi $x_n \in]k, +\infty[\subseteq I_{+\infty}$. Pertanto, la 1) è vera. ◊

Teorema 4.1.4 *Sia* $\{x_n\}$ *una qualsiasi successione di numeri reali, divergente negativamente. Le dichiarazioni seguenti sono equivalenti*

1) $\forall\, I_{-\infty} \qquad \exists\, J_{+\infty} \ : \quad (n \in \mathbb{N} \cap J_{+\infty}) \Rightarrow (x_n \in I_{-\infty})$

2) $\forall\, k > 0 \qquad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (x_n < -k)$.

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 4.1.3. ◊

Osservazione 4.1.2 Evidenziamo i seguenti esempi di successioni numeriche:

- la successione costante $\{1\}$ soddisfa banalmente la condizione

  $$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (|1-1| < \varepsilon) \ ;$$

  quindi, per il teorema 4.1.2, converge al suo valore costante 1 ;

- la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ soddisfa la condizione

  $$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow \left(\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right).$$

  Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$, in virtù della *proprietà Archimedea* di $\mathbb{R}$, esiste $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$; quindi, se $n > \nu$, risulta $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu} < \varepsilon$. Quindi, per il teorema 4.1.2, la successione converge a zero;

- la successione $\{n\}$ è divergente positivamente. Infatti, per ogni $k > 0$, in virtù della *proprietà Archimedea* di $\mathbb{R}$, esiste $\nu > k$; quindi, se $n > \nu$, risulta $n > \nu > k$. Quindi, per il teorema 4.1.3, la successione $\{n\}$ è divergente positivamente;

- la successione *oscillante* $0,1,0,1,0,1,\ldots$ ovviamente non converge né diverge. ◊

Teorema 4.1.5 [*unicità del limite*] *Ogni successione numerica regolare ha un solo limite.*

Dimostrazione. Siano $\{x_n\}$ una successione numerica regolare e

(4.1.3) $$\lim_{n\to+\infty} x_n = l\,.$$

Pertanto $l \in \mathbb{R}$, oppure $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$.
Se $l \in \mathbb{R}$, per assurdo supponiamo che esiste $l' \in \mathbb{R} - \{l\}$ tale che

(4.1.4) $$\lim_{n\to+\infty} x_n = l'\,.$$

Se $l' > l$, poniamo $\varepsilon = \frac{l'-l}{2}$ sicché

(4.1.5) $$l + \varepsilon = l' - \varepsilon\,.$$

Per il teorema 4.1.2, la (4.1.3) implica che

(4.1.6) $$\exists\, \nu \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)$$

e la (4.1.4) implica che

(4.1.7) $\exists\, \nu' \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu') \Rightarrow (l' - \varepsilon < x_n < l' + \varepsilon).$

In conseguenza, denotando con m un qualsiasi intero positivo maggiore di $\max\{\nu, \nu'\}$, dalle (4.1.6), (4.1.7), (4.1.5) segue che il numero reale x_m è simultaneamente maggiore e minore del numero reale $l + \varepsilon$. Assurdo.
Se $l' < l$, ovviamente possiamo pervenire ad un assurdo con un identico ragionamento.
Ancora supponendo $l \in \mathbb{R}$, per assurdo ammettiamo che sia simultaneamente possibile la condizione

(4.1.8) $$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty .$$

Sia ε un qualsiasi numero reale positivo e $k = |l| + \varepsilon$. Per il teorema 4.1.2, la (4.1.3) implica che

(4.1.9) $\exists \nu \in \mathbb{N} \ :\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \leq |l| + \varepsilon).$

Per il teorema 4.1.3, la (4.1.8) implica che

(4.1.10) $\exists\, \nu' \in \mathbb{N} \ :\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu') \Rightarrow (x_n > k = |l| + \varepsilon)$.

Pertanto, denotando con m un qualsiasi intero positivo maggiore di $\max\{\nu, \nu'\}$, dalle (4.1.9), (4.1.10) segue che il numero reale x_m è simultaneamente maggiore e minore del numero reale $|l| + \varepsilon$. Assurdo.

In tutti gli altri casi possibili, l'unicità di l può essere facilmente dimostrata con ragionamenti perfettamente analoghi. ◊

Definizione 4.1.4 Diciamo che una successione numerica $\{x_n\}$ è *limitata superiormente* se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq k\,. \;\diamond$$

Definizione 4.1.5 Diciamo che una successione numerica $\{x_n\}$ è *limitata inferiormente* se esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad h \leq x_n\,. \;\diamond$$

Definizione 4.1.6 Diciamo che una successione numerica $\{x_n\}$ è *limitata* se esistono $h\,, k \in \mathbb{R}$ tali che

$$(4.1.11) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad h \leq x_n \leq k\,. \;\diamond$$

Teorema 4.1.6 *Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione numerica convergente. Allora $\{x_n\}$ è limitata.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Sia ε un numero reale positivo. Allora, per il teorema 4.1.2, esiste un intero positivo ν tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)\,.$$

Quindi, ponendo $h = \min\{x_1, \dots, x_\nu, l - \varepsilon\}$ e $k = \max\{x_1, \dots, x_\nu, l + \varepsilon\}$, otteniamo

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad h \leq x_n \leq k\,.\ \diamond$$

Teorema 4.1.7 [*permanenza del segno*] *Sia* $\{x_n\}$ *una qualsiasi successione numerica regolare. Se* $l > 0$ *, esiste un intero positivo* ν *tale che*

(4.1.12) $$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (n > \nu) \Rightarrow (x_n > 0)\,.$$

Dimostrazione. Se $l \in\,]0, +\infty[$, sia $\varepsilon \in\,]0, l[$. Quindi, per il teorema 4.1.2, esiste un intero positivo ν tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (x_n > l - \varepsilon > 0)\,.$$

Se $l = +\infty$, sia $k \in\,]0, +\infty[$. Per il teorema 4.1.3, esiste un intero positivo ν tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (n > \nu) \Rightarrow (x_n > k > 0).\ \diamond$$

Teorema 4.1.8 *Siano* $\{x_n\}$ *e* $\{z_n\}$ *due successioni di numeri reali. Se*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq z_n \tag{4.1.13}$$

e $\{x_n\}$ *diverge positivamente, allora* $\{z_n\}$ *diverge positivamente.*

Dimostrazione. Per il teorema 4.1.3 risulta che $\forall\, k > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\,n > \nu) \Rightarrow (x_n > k)$. Quindi $\forall\, k > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\,n > \nu) \Rightarrow (z_n \geq x_n > k)$. Quindi $\forall\, k > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (\,n > \nu) \Rightarrow (z_n > k)$. Quindi, per il teorema 4.1.3

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty\,. \;\diamond$$

Osservazione 4.1.3 In questo come in altri casi, la tesi del teorema 4.1.8 è vera anche se la diseguaglianza (4.1.13) esiste solo a partire da un particolare indice. ◊

Teorema 4.1.9 *Siano* $\{x_n\}$ *e* $\{z_n\}$ *due successioni numeriche convergenti, tali che*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq z_n\;.$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leq \lim_{n\to+\infty} z_n .$$

Dimostrazione. Siano $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $l' = \lim_{n\to+\infty} z_n$. Per il teorema 4.1.2 risulta

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\nu' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu') \Rightarrow (l' - \varepsilon < z_n < l' + \varepsilon).$$

Per assurdo, supponiamo $l > l'$. Quindi $l - l' > 0$. Poniamo $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$ e $\delta = 1 + \max\{\nu, \nu'\}$. Poiché $\delta \in \mathbb{N}$, $\delta > \nu$, $\delta > \nu'$, abbiamo

$$l - \varepsilon < x_n \leq z_n < l' + \varepsilon$$

da cui segue $l - \varepsilon < l' + \varepsilon$, da cui segue $l - l' < 2\varepsilon$, da cui segue $l - l' < l - l'$. Assurdo. Conseguentemente, $l \leq l'$. ◊

Teorema 4.1.10 *Siano* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *e* $\{z_n\}$ *tre successioni numeriche tali che*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq y_n \leq z_n .$$

Se $\{x_n\}$ *e* $\{z_n\}$ *convergono ad* l, *allora*

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = l .$$

Dimostrazione. Dal teorema 4.1.2 segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu') \Rightarrow (l - \varepsilon < z_n < l + \varepsilon).$$

Sia ε un qualsiasi numero reale positivo e sia $\nu'' = \max\{\nu, \nu'\}$. Ebbene, $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \ n > \nu''$ implica

$$l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon\,.$$

Pertanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon)\,. \ \diamond$$

Definizione 4.1.7 Una successione numerica $\{x_n\}$ è detta *crescente* (o *monotona crescente*) se

(4.1.14) $$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq x_{n+1}\,. \ \diamond$$

Definizione 4.1.8 Una successione numerica $\{x_n\}$ è detta *strettamente crescente* (o *monotona strettamente crescente*) se

(4.1.15) $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n < x_{n+1}\,. \ \diamond$$

Definizione 4.1.9 Una successione numerica $\{x_n\}$ è detta *decrescente* (o *monotona decrescente*) se

$$(4.1.16) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \geq x_{n+1} \; . \; \diamond$$

Definizione 4.1.10 Una successione numerica $\{x_n\}$ è detta *strettamente decrescente* (o *monotona strettamente decrescente*) se

$$(4.1.17) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n > x_{n+1} \; . \; \diamond$$

Teorema 4.1.11 *Ogni successione monotona è regolare ed è convergente se è limitata.*

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi per una successione numerica monotona crescente. Se la successione è monotona decrescente la dimostrazione è perfettamente analoga.
Sia dunque $\{x_n\}$ una qualsiasi successione numerica. I casi possibili sono:

1) $\{x_n\}$ è limitata
2) $\{x_n\}$ non è limitata.

Nel caso 1), supponiamo che $\{x_n\}$ sia monotona crescente. Evidentemente il codominio della successione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente. Quindi, per la (1.2.13), esiste uno ed un solo numero reale $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ tale che

(4.1.18) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$

(4.1.19) $\forall \varepsilon \in \,]0,+\infty[\quad \exists \nu \in \mathbb{N} \,:\, x_\nu > \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n - \varepsilon\,.$

Quindi $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n - \varepsilon < x_\nu \leq x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n < \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n + \varepsilon\right)$. Quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n > \nu) \Rightarrow \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n - \varepsilon < x_n < \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n + \varepsilon\right).$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$. Quindi $\{x_n\}$ è convergente.

Nel caso 2), supponiamo che $\{x_n\}$ sia monotona crescente. Quindi il codominio della successione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente. Quindi il codominio della successione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente. Quindi per ogni numero reale positivo k esiste un intero positivo ν tale che $x_\nu > k$. Quindi

$$\forall\, k > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (n > \nu) \Rightarrow (x_n \geq x_\nu > k)\,.$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Quindi $\{x_n\}$ è divergente positivamente. ◊

Teorema 4.1.12 *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *un punto di accumulazione per* X*. Allora esiste una successione* $\{x_n\}$ *di* $X - \{x_0\}$ *tale che*

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 .$$

Dimostrazione. I casi possibili sono i tre seguenti:

1) $x_0 = +\infty$
2) $x_0 = -\infty$
3) $x_0 \in \mathbb{R}$.

Nel caso 1), per le definizioni 3.2.3 e 3.2.2, $\forall a \in \mathbb{R}$ risulta $]a, +\infty[\cap X \neq \emptyset$. Di conseguenza, $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ tale che $x_n > n$. Quindi, esiste una successione $\{x_n\}$ di $X - \{+\infty\}$ tale che $x_n \geq n$. Quindi, esiste una successione $\{x_n\}$ di $X - \{x_0\}$ tale che $x_n \geq n$. Da ciò e dal teorema 4.1.8, tenendo conto del fatto che $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$, otteniamo

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 .$$

Nel caso 2), dimostriamo la tesi ragionando come nel caso 1).

Nel caso 3), per la definizione 3.1.12, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta $\left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap X - \{x_0\} \neq \emptyset$. Di conseguenza, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X - \{x_0\}$ tale che $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$. Sia ora $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Poiché

$\frac{1}{\varepsilon} \in]0,+\infty[$, per il teorema 1.2.4 esiste un intero positivo ν tale che $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. Quindi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica $n > \frac{1}{\varepsilon}$ sicché $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Di conseguenza, siccome $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$, abbiamo $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Pertanto,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \varepsilon)\,;$$

quindi, per il teorema 4.1.2

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\,. \ \diamond$$

4.1.2 Operazioni sui limiti

Definizione 4.1.11 Siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ due qualsiasi successioni numeriche, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La successione $\{z_n\}$, tale che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $z_n = c_1 x_n + c_2 y_n$, è chiamata *combinazione lineare* di $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. ◊

Teorema 4.1.13 *Siano* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *due successioni numeriche tali che* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = l_2 \in \mathbb{R}$. *Siano* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Risulta*

$$(4.1.20) \qquad \lim_{n\to+\infty} (c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 l_1 + c_2 l_2\,.$$

Dimostrazione. In virtù del teorema 4.1.2, per ipotesi risulta

(4.1.21) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_1 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu_1) \Rightarrow (|x_n - l_1| < \varepsilon)$

(4.1.22) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu_2) \Rightarrow (|y_n - l_2| < \varepsilon)$.

I casi possibili sono i tre seguenti

1) $c_1 = c_2 = 0$
2) $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$ (oppure $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$)
3) $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.

Nel caso 1), la (4.1.20) è banalmente vera.

Nel caso 2), basta supporre $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Sia $\varepsilon > 0$; quindi $\frac{\varepsilon}{|c_2|} > 0$; quindi, per la (4.1.22), $\exists \, \nu_2 \in \mathbb{N} \ : \ \forall \, n \in \mathbb{N} \ (n > \nu_2) \Rightarrow \left(|y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{|c_2|}\right)$. Quindi $\forall \, \varepsilon > 0$ esiste $\nu = \nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall \, n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica

$$|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 l_1 + c_2 l_2)| = |c_2 y_n - c_2 l_2| = |c_2 (y_n - l_2)|$$

$$= |c_2||y_n - l_2| < |c_2| \frac{\varepsilon}{|c_2|} = \varepsilon \, .$$

Quindi, per il teorema 4.1.2, la (4.1.20) è vera.

Nel caso 3), sia $\varepsilon > 0$. Quindi $\frac{\varepsilon}{2|c_1|} > 0$; quindi, per la (4.1.21), $\exists\, \nu_1 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu_1) \Rightarrow \left(|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2|c_1|}\right)$. Inoltre $\frac{\varepsilon}{2|c_2|} > 0$; quindi, per la (4.1.22), $\exists\, \nu_2 \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu_2) \Rightarrow \left(|y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2|c_2|}\right)$. Quindi $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica

$$\begin{aligned}|(c_1x_n + c_2y_n) - (c_1l_1 + c_2l_2)| &= |c_1(x_n - l_1) + c_2(y_n - l_2)| \\ &\leq |c_1(x_n - l_1)| + |c_2(y_n - l_2)| = |c_1||x_n - l_1| + |c_2||y_n - l_2| \\ &< |c_1|\frac{\varepsilon}{2|c_1|} + |c_2|\frac{\varepsilon}{2|c_2|} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Quindi, per il teorema 4.1.2, la (4.1.20) è vera. ◊

Osservazione 4.1.4 Assumendo $c_1 = c_2 = 1$, dal teorema 4.1.13 segue

(4.1.23)
$$\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = l_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = l_2 \in \mathbb{R}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = l_1 + l_2\right). \text{ ◊}$$

Teorema 4.1.14 *Siano* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *due successioni numeriche tali che* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. *Risulta*

(4.1.24) $$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema 4.1.6, esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

(4.1.25) $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a \leq x_n \leq b\,.$$

Per il teorema 4.1.3

(4.1.26) $$\forall\ k > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (\,n > \nu) \Rightarrow (y_n > k)\,.$$

Siano $k > 0$, $k' = \max\{1, k - a\}$. Poiché $k' \geq 1 > 0$, per la (4.1.26) $\exists\ \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $n > \nu$ implica $y_n > k' \geq k - a$ sicché $y_n > k - a$. Di conseguenza, tenendo conto della (4.1.25), $n > \nu$ implica $x_n + y_n > a + k - a = k$. Con ciò, la (4.1.24) è conseguita. ◊

Osservazione 4.1.5 Si verifica facilmente che il teorema 4.1.14 è vero anche se $\{x_n\}$ è soltanto limitata inferiormente. ◊

Teorema 4.1.15 *Siano* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *due successioni numeriche tali che* $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty$. *Risulta*

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = -\infty\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del