CAPITOLO 7

INTEGRAZIONE ◊

7.1 Integrale definito

7.1.1 Definizione di integrale definito

La *Teoria dell'integrazione* fu sviluppata da *Riemann* [7.1.1] per le funzioni definite in intervalli di numeri reali ed a valori reali. Si tratta di una teoria che ha consentito di conseguire risultati molto importanti per l'*Analisi matematica classica*, come pure sul piano delle applicazioni. Per questo motivo viene presentata in questo capitolo. Evidenziamo però che successivamente tale teoria fu estesa da *Lebesgue* [7.1.2] a funzioni di tipo più generale. Evidenziamo anche che hanno ormai grande importanza, anche sul piano delle applicazioni, le funzioni definite negli *spazi funzionali*, cioè negli insiemi i cui elementi sono funzioni che godono di particolari proprietà. La nuova *Teoria dell'integrazione* di *Lebesgue* include tutti i risultati della precedente teoria di *Riemann* ed è una parte importante dell'*Analisi*

◊ A. Maceri, *Integrazione*, e-ISBN 978-88-85929-82-1, © Accademica 2021

[7.1.1] *Georg Friedrick Bernard Riemann*, Breselenz (Germany) 17.09.1826 – Selasca (Italy) 20.07.1866
[7.1.2] *Henry Lebesgue*, Beauvais (France) 1875 – Paris 26.07.1941

matematica moderna.

Definizione 7.1.1 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Chiamiamo *partizione* dell'intervallo $[a, b]$ la decomposizione di $[a, b]$ ottenuta con $n \in \mathbb{N}$ punti $x_1, \dots, x_n$, dove

(7.1.1) $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,. \diamond$$

Teorema 7.1.1 *Siano*

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *continua*
- A *l'insieme costituito dai numeri* $\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\right] \in \mathbb{R}$ *ottenuti al variare in tutti i modi possibili di* $n \in \mathbb{N}$ *e della partizione* $x_1, \dots, x_n$ *dell'intervallo* $[a, b]$
- B *l'insieme costituito dai numeri* $\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\right] \in \mathbb{R}$ *ottenuti al variare in tutti i modi possibili di* $n \in \mathbb{N}$ *e della partizione* $x_1, \dots, x_n$ *dell'intervallo* $[a, b]$.

Ebbene, gli insiemi numerici A *e* B *sono separati e contigui* [7.1.3] .

Dimostrazione. Per dimostrare che A e B sono separati dobbiamo provare che

(7.1.2) $$(p \in A \quad \text{e} \quad q \in B) \;\Rightarrow\; (p \leq q)\,.$$

Siano $p \in A$, $q \in B$. Quindi esiste una partizione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ di $[a, b]$ tale che

$$p = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \right]$$

ed esiste una partizione $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b$ di $[a, b]$ tale che

$$q = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\max_{z \in [z_{j-1}, z_j]} f(z) \right) (z_j - z_{j-1}) \right].$$

Ovviamente, l'insieme

$$\{x_1, \dots, x_{m-1}\} \cup \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

è una partizione

[7.1.3] Vedi definizione 1.2.4.

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_r = b$$

di $[a, b]$, dove $r \in \mathbb{N}$ e $\forall\, i \in \{1, \dots, m\}$ l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ ha la partizione

$$x_{i-1} = y_{j_1} < \cdots < y_{j_i} = x_i\ .$$

Questo ragionamento ci consente di dimostrare la (7.1.2). Infatti, risulta

$$p = \sum_{i=1}^{m} \left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \left(\sum_{k=j_1}^{j_i} (y_k - y_{k-1}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=j_1}^{j_i} \left[\left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (y_k - y_{k-1}) \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=j_1}^{j_i} \left[\left(\min_{x \in [y_{k-1}, y_k]} f(x) \right) (y_k - y_{k-1}) \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=j_1}^{j_i} \left[\left(\max_{x \in [y_{k-1}, y_k]} f(x) \right) (y_k - y_{k-1}) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=i_1}^{i_j} \left[\left(\max_{x \in [y_{h-1}, y_h]} f(x) \right) (y_h - y_{h-1}) \right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=i_1}^{i_j} \left[\left(\max_{x\in[z_{j-1},z_j]} f(x) \right)(y_h - y_{h-1}) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\max_{z\in[z_{j-1},z_j]} f(z) \right)(z_j - z_{j-1}) \right] = q\ .$$

Dimostriamo ora che A e B sono contigui. Dobbiamo provare che

(7.1.3) $\forall\varepsilon > 0$ esistono $x \in A$ e $y \in B$ tali che $y - x < \varepsilon$.

A tal fine consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$

- la partizione di $[a, b]$

$$x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n} > x_0$$

$$x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = x_0 + 2\ \frac{b-a}{n} > x_1$$

$$x_3 = x_2 + \frac{b-a}{n} = x_0 + 3\ \frac{b-a}{n} > x_2$$

…

$$x_n = x_{n-1} + \frac{b-a}{n} = x_0 + n\ \frac{b-a}{n} = a + b - a = b > x_{n-1}$$

- i numeri reali

$$(7.1.4) \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \right] \in A$$

$$(7.1.5) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \right] \in B \, .$$

Evidentemente, per dimostrare la (7.1.3) basta provare che

$$\lim_{n \to +\infty} (S_n - s_n) = 0 \, ,$$

i.e. , che

$$(7.1.6) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \nu \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n > \nu \qquad |S_n - s_n| < \varepsilon \; .$$

Pertanto, sia $\varepsilon > 0$. Per il teorema 5.3.8 esiste $\delta > 0$ tale che

$$(7.1.7) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \qquad (|x' - x''| < \delta) \left(|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a} \right).$$

Denotiamo con ν un qualsiasi intero positivo tale che $\nu > \frac{b-a}{\delta}$. Di conseguenza, per ogni $n > \nu$ si ha ovviamente

$$(7.1.8) \qquad \frac{b - a}{n} < \delta \; .$$

D'altro canto, per il teorema 5.3.6 $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ esistono $\xi_i\, , \eta_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$ tali che

$$(7.1.9) \qquad f(\xi_i) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad , \qquad f(\eta_i) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad .$$

Poiché $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ e $x_{i-1} \le \eta_i \le x_i$, si ha $-(x_i - x_{i-1}) \le \xi_i - \eta_i \le x_i - x_{i-1}$ e quindi, tenendo conto della (7.1.8), $|\xi_i - \eta_i| \le |x_i - x_{i-1}| = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} < \delta$. Da ciò e dalla (7.1.7) segue $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Conseguentemente

$$|S_n - s_n| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\right] - \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\right]\right|$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})\right]\right|$$
$$< \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1})\right]\right| = \left|\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - x_{i-1})]\right| = \varepsilon$$

con il che la tesi è conseguita. ◊

Osservazione 7.1.1 Il teorema 7.1.1 analizza gli insiemi numerici A e B e dimostra che essi sono separati e contigui. Quindi, per il teorema

1.2.7, esiste uno ed un solo $l \in \mathbb{R}$ (detto *elemento di separazione*) tale che

(7.1.10) $$a \leq l \leq b \qquad \forall a \in A \text{ and } \forall b \in B \ . \ \diamond$$

Osservazione 7.1.2 La dimostrazione del teorema 7.1.1 evidenzia che le successioni numeriche $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ sono entrambe convergenti verso lo stesso limite. Per la (7.1.10), tale limite è l'elemento di separazione l , *i.e.*

(7.1.11) $$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} s_n = l \ . \ \diamond$$

Definizione 7.1.2 Siano

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- f continua.

L'elemento di separazione (7.1.10) è un numero reale chiamato *integrale definito* (oppure *integrale di Riemann*) *di* f *su* $[a,b]$ e denotato con il simbolo

(7.1.12) $$\int_a^b f(x)\, dx \ . \ \diamond$$

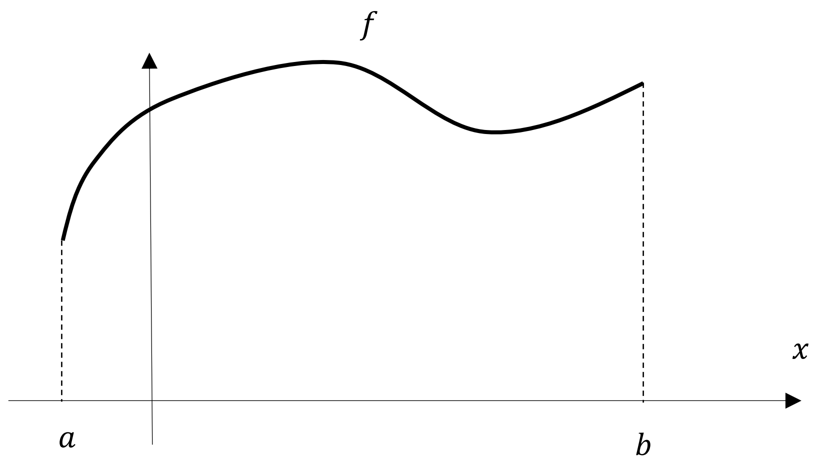

Fig. 7.1.1

Osservazione 7.1.3 L'integrale definito (7.1.12) ha una *interpretazione geometrica,* molto importante per le applicazioni.
Siano

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

In un piano qualsiasi, sia O, x, y un riferimento *Cartesiano* ortogonale. Consideriamo, per ciascun $x \in [a, b]$, il punto P del piano di ascissa x e ordinata $y = f(x)$. Al variare di x in $[a, b]$, il punto $P = (x, f(x))$ descrive nel piano una curva chiamata *diagramma Cartesiano della funzione* f.

Denotiamo con S la parte di piano limitata dal diagramma *Cartesiano* di f, dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$ (fig. 7.1.1).
Consideriamo ora

- una qualsiasi partizione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ dell'intervallo $[a, b]$
- il plurirettangolo (contenuto in S) costituito dall'unione dei rettangoli di base $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_1, x_2]$ e, rispettivamente, di altezza $\min_{x \in [x_0, x_1]} f(x)$, $\min_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$, ... , $\min_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$. L'area di tale plurirettangolo contenuto in S è, ovviamente, data da $s_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \right] \in \mathbb{R}$ (fig. 7.1.2)
- il plurirettangolo (contenente S) costituito dall'unione dei rettangoli di base $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_1, x_2]$ e, rispettivamente, di altezza $\max_{x \in [x_0, x_1]} f(x)$, $\max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$, ... , $\max_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$. L'area di tale plurirettangolo contenente S è, ovviamente, data da $S_n = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \right] \in \mathbb{R}$ (fig. 7.1.3).

Le (7.1.10) e (7.1.11) mostrano chiaramente che

- l'integrale definito (7.1.12) misura l'area di S
- tale valore può essere calcolato, in modo semplice ma con la

desiderata approssimazione, con la (7.1.11). ◊

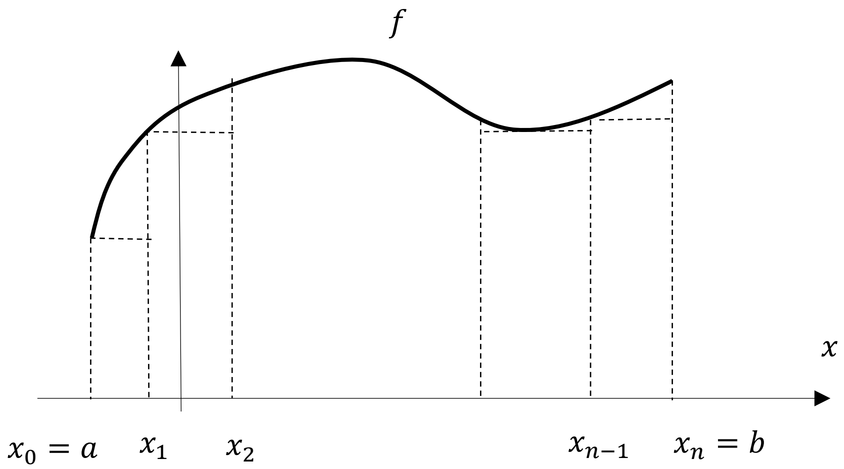

Fig. 7.1.2

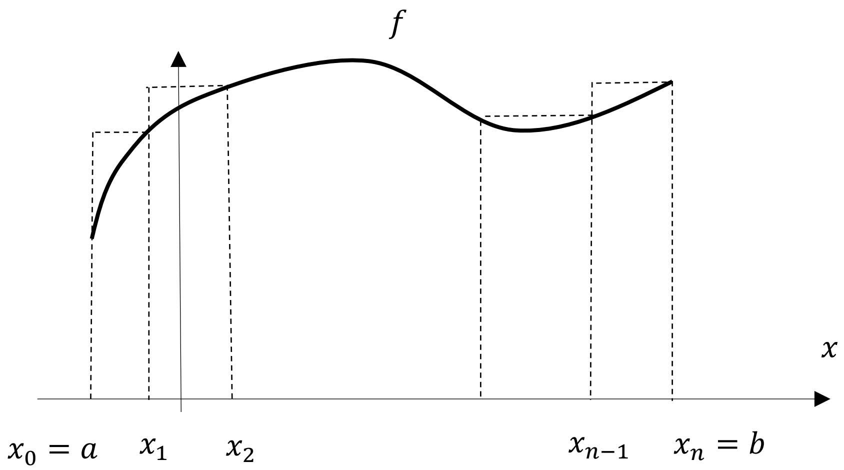

Fig. 7.1.3

Osservazione 7.1.4 Nella (7.1.12) x di solito è chiamata *variabile di integrazione*. Evidenziamo che è possibile usare qualsiasi lettera. Pertanto, possiamo indicare l'integrale definito con uno qualsiasi dei simboli che seguono, senza distinzione

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \int_a^b f(y)\,dy\,, \quad \int_a^b f(z)\,dz\ . \quad \diamond$$

Osservazione 7.1.5 Le (7.1.10), (7.1.11), (7.1.4), (7.1.5) banalmente implicano

$$(7.1.13) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad s_n \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_n$$

$$(7.1.14) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n\ . \quad \diamond$$

Osservazione 7.1.6 Consideriamo le successioni numeriche $\{s_n\}$ e $\{S_n\}$ rispettivamente date dalle (7.1.4) e (7.1.5). Denotiamo, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, con ρ_i un qualsiasi punto di $[x_{i-1}, x_i]$. Quindi $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ risulta

$$\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \le f(\rho_i) \le \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\ ,$$

quindi $\forall\, n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(7.1.15) \qquad s_n \leq \sum_{i=1}^{n} [f(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})] \leq S_n \,.$$

Le $(7.1.15), (7.1.14)$ ed il teorema 4.1.10 implicano

$$(7.1.16) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})] \;. \;\diamond$$

7.1.2 Proprietà dell'integrale definito

Teorema 7.1.2 *Siano*

- $a\,, b\,, k \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $f(x) = k \qquad \forall\, x \in [a, b]\,.$

In tali ipotesi, risulta

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)\,. \tag{7.1.17}$$

Dimostrazione. Dalle (7.1.4) e (7.1.5) si ha immediatamente

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad s_n = S_n = k(b-a)\,.$$

Questo risultato e la $(7.1.11)$ implicano la $(7.1.17)$. ◊

Osservazione 7.1.7 Il teorema 7.1.2 implica, banalmente

$$\int_a^b 0\,dx = 0\,. \tag{7.1.18}$$ ◊

Teorema 7.1.3 *Siano*

- $a\,,b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$
- f *continua*
- $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a,b]\,.$

In tali ipotesi, risulta

(7.1.19) $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Dimostrazione. Dalla (7.1.4) si ottiene, con immediatezza

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad s_n \geq 0.$$

Questo risultato, la (7.1.13) ed il teorema 4.1.9 implicano la (7.1.19) . ◊

Teorema 7.1.4 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f_1 *e* f_2 *continue*
- $c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$

In tali ipotesi, risulta

(7.1.20) $$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x)\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Dalla (7.1.16) segue

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)(x)\, dx \ = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left\{ c_1 \sum_{i=1}^{n} [f_1(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})] + c_2 \sum_{i=1}^{n} [f_2(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})] \right\}$$

$$= c_1 \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})] + c_2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [f_2(\rho_i) \cdot (x_i - x_{i-1})]$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\, dx \ . \ \diamond$$

Teorema 7.1.5 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\ [a,b] \to \mathbb{R}$
- $g\,:\ [a,b] \to \mathbb{R}$
- f *e* g *continue*
- $f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]\,.$

In tali ipotesi, risulta

(7.1.21) $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema 7.1.3 si ha

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx \geq 0\,.$$

Conseguentemente, per il teorema 7.1.4 risulta

$$\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

con il che la (7.1.21) è conseguita . ⬨

Teorema 7.1.6 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\ : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f *continua.*

In tali ipotesi, risulta

$$(7.1.22) \qquad \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx\,.$$

Dimostrazione. Per la (1.2.17) risulta

$$\forall x \in [a,b] \qquad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|\,.$$

Conseguentemente, dai teoremi 7.1.5 e 7.1.4 si trae

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b -|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

sicché, per la (1.2.18), la $(7.1.22)$ è vera. ◊

Definizione 7.1.3 Siano

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$
- f continua.

Poniamo

(7.1.23) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(7.1.24) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$ ◊

Teorema 7.1.7 *Siano*

- $a\,,b\,,c \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\,[min\{a,b,c\}\,, max\{a,b,c\}] \to \mathbb{R}$
- f *continua.*

In tali ipotesi, risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{7.1.25}$$

Dimostrazione. I casi possibili sono

1. $c \in \,]a,b[$
2. $c \in \{a,b\}$
3. $c \notin [a,b]$.

Nel caso 1 eseguiamo la partizione di $[a,c]$ e $[c,b]$ con, rispettivamente

$$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{h-1} < x_h = c$$

$$c = x_h < x_{h+1} < \cdots x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Con la (7.1.16) otteniamo facilmente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(\rho_i)\cdot(x_i - x_{i-1})]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{h}[f(\rho_i)\cdot(x_i - x_{i-1})] + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=h+1}^{n}[f(\rho_i)\cdot(x_i - x_{i-1})]$$

$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Nel caso 2 la (7.1.25) segue banalmente dalla (7.1.24).

Nel caso 3 o $a < b < c$ oppure $c < a < b$. Se $a < b < c$, il caso 1 ci fornisce

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\,.$$

Questo risultato e la (7.1.23) implicano la (7.1.25).

Un analogo ragionamento di può applicare al caso $c < a < b$. ◊

Teorema 7.1.8 [*valor medio*] *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$
- f *continua.*

In tali ipotesi, esiste $c \in [a,b]$ *tale che*

(7.1.26) $$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)\ .$$

Dimostrazione. Per il teorema di *Weierstrass* esistono $m\,, M \in \mathbb{R}$ tali che $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Quindi

$$\forall x \in [a,b] \qquad m \le f(x) \le M$$

quindi, tenendo conto dei teoremi 7.1.5 e 7.1.2, risulta

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)\ ,$$

quindi

(7.1.27) $$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M\ .$$

In virtù della (7.1.27) e del teorema 5.3.3, esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)\ .\ \diamond$$

Teorema 7.1.9 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:[a,b] \to \mathbb{R}$
- $g\,:[a,b] \to \mathbb{R}$
- f *e* g *continue*
- $g \geq 0$.

In tali ipotesi, esiste $c \in [a,b]$ *tale che*

(7.1.28) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Ponendo $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, risulta

$$\forall x \in [a,b] \qquad m \leq f(x) \leq M$$

sicché

$$\forall x \in [a,b] \qquad m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x)$$

sicché

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Pertanto, se $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, si ha $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ e la $(7.1.28)$ è vera.

Se $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, si ha

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

e la $(7.1.28)$ è vera in virtù del teorema 5.3.3. ◊

Definizione 7.1.4 Siano

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Chiamiamo *primitiva di* f qualsiasi funzione $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$ e tale che

$$(7.1.29) \qquad \forall\, x \in [a,b] \qquad G'(x) = f(x) \ . \ \diamond$$

Osservazione 7.1.8 Siano

- $a\,, b \in \mathbb{R}$

- $a < b$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- G una qualsiasi primitiva di f.

Osserviamo che $\forall\, c \in \mathbb{R}$ la funzione $G + c$ è una primitiva di f . ◊

Teorema 7.1.10 *Siano*

- $a\,, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $F : [a, b] \to \mathbb{R}$
- $G : [a, b] \to \mathbb{R}$
- F *e* G *primitive di* f .

In tali ipotesi, esiste $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$(7.1.30) \qquad \forall\, x \in [a, b] \qquad F(x) = G(x) + c\ .$$

Dimostrazione. La tesi è una immediata conseguenza del teorema 6.1.14. ◊

Teorema 7.1.11 [*teorema fondamentale del calcolo integrale*] *Siano*

- $a\,,b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$
- f *continua.*

In tali ipotesi

- *esiste una primitiva di* f
- *qualunque sia la primitiva* G *di* f *, risulta*

(7.1.31) $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G\,(a)\ .$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione (chiamata *funzione integrale*)

(7.1.32) $$F\ :\ x \in [a,b]\ \to\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}\,.$$

Sia $x \in [a,b]$. Sappiamo che F è derivabile in x se esiste ed è finito (cioè se è un numero reale) il limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\ .$$

Orbene, risulta (in virtù dei teoremi 7.1.7 e 7.1.8)

$$(7.1.33) \qquad \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(l(h)\big)$$

e, poiché $l(h)$ è un punto dell'intervallo di estremi x e $x+h$

$$(7.1.34) \qquad \lim_{h\to 0} l(h) = x\,.$$

Dalle $(7.1.33), (7.1.34)$ e dal teorema 5.1.23 si trae

$$(7.1.35) \qquad F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f\big(l(h)\big) = f(x)$$

sicché F è una primitiva di f .

Sia ora G una qualsiasi primitiva di f . In virtù del teorema 7.1.10 , esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in [a,b] \qquad G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c\ ,$$

quindi $c = G(a)$, quindi

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)\ . \ \diamond$$

Osservazione 7.1.9 La (7.1.31) si scrive anche, di solito

$$\int_a^b f(x)\, dx = [G(x)]_a^b\ . \tag{7.1.36}$$

Esempio 7.1.1 Poiché $\sin x$ è una funzione primitiva di $\cos x$, usando la (7.1.36) si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1\ . \ \diamond$$

Esempio 7.1.2 Poiché $\log x$ è una funzione primitiva di $\frac{1}{x}$, usando la (7.1.36) si ottiene

$$\int_2^3 \frac{1}{x}\ dx = [\log x]_2^3 = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}\ . \ \diamond$$

Teorema 7.1.12 [*cambio di variabile*] *Siano*

- $a\,, b\,, \alpha\,, \beta \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $\alpha < \beta$

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$
- $\varphi(\alpha) = a$
- $\varphi(\beta) = b$
- φ *derivabile*
- f *e* φ' *continue.*

In tali ipotesi, risulta

(7.1.37) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt \ .$$

Dimostrazione. Sia G una funzione primitiva di f . Quindi $G \circ \varphi$ è una funzione primitiva di $f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$. Quindi, per il teorema 7.1.11 risulta

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt = [G \circ \varphi]_\alpha^\beta$$

$$= G\big(\varphi(\beta)\big) - G\big(\varphi(\alpha)\big) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx \ . \ \diamond$$

Esempio 7.1.3 Sia $a > 0$. Dobbiamo calcolare

(7.1.38) $$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \ .$$

Ponendo $x = a \sin t$, dove $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, si ha

- $dx = \frac{dx}{dt}(t)\, dt = a \ \cos t$
- $x(0) = a \sin 0 = 0$
- $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \sin \frac{\pi}{2} = a$.

Tale sostituzione trasforma la (7.1.38) in

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - (\sin t)^2}\, a \cos t \ dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 \ dt \, .$$

E' facile verificare che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t + \sin t \cos t}{2}\right) = (\cos t)^2 \, .$$

Di conseguenza, risulta

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \left[\frac{t + \sin t \cos t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4} \, . \ \diamond$$

Teorema 7.1.13 [*integrazione per parti*] *Siano*

- $a\,,b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$
- $g\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$
- f *e* g *derivabili.*

In tali ipotesi, risulta

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \ . \tag{7.1.39}$$

Dimostrazione. Risulta, immediatamente

$$\int_a^b \frac{d(f\cdot g)}{dx}\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b \ ,$$

quindi

$$\int_a^b [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b$$

sicché la $(7.1.39)$ è vera. ⋄

Esempio 7.1.4 Dobbiamo calcolare

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \ dx \ .$$

Risulta

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \ dx = [x \tan^{-1} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \ dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \ dx = \frac{\pi}{4} - [\log(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\log 2}{2} \ . \ \diamond$$

7.1.3 Integrale improprio

La definizione di integrale definito può essere estesa alle funzioni non limitate. Precisamente

Definizione 7.1.5 Supponiamo che

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $a < b$
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$
- $c \in \,]a,b[$
- f è continua in $[a,b] - \{c\}$

- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale
- $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale.

In tali ipotesi, diciamo che l'*integrale definito di* f *su* $[a,b]$ esiste ed è il numero reale

(7.1.40) $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \; . \diamond$$

La definizione di integrale definito può essere estesa alle funzioni continue su intervalli non limitati. Precisamente

Definizione 7.1.6 Supponiamo che

- $a \in \mathbb{R}$
- $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$
- f è continua in $[a,+\infty[$
- $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale.

In tali ipotesi, chiamiamo *integrale improprio di* f *su* $[a,+\infty[$ il numero reale

(7.1.41) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \; . \diamond$$

Definizione 7.1.7 Supponiamo che

- $b \in \mathbb{R}$
- $f : \,]-\infty, b] \to \mathbb{R}$
- f è continua in $]-\infty, b]$
- $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale.

In tali ipotesi, chiamiamo *integrale improprio di* f *su* $]-\infty, b]$ il numero reale

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx \,. \quad \diamond \tag{7.1.42}$$

Definizione 7.1.8 Supponiamo che

- $f : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- f è continua in $\mathbb{R}$
- $c \in \mathbb{R}$
- f è dotata di integrale improprio su $[c, +\infty[$
- f è dotata di integrale improprio su $]-\infty, c]$.

In tali ipotesi, chiamiamo *integrale improprio di* f *su* $\mathbb{R}$ il numero reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \;. \tag{7.1.43}$$ ◊

Teorema 7.1.14 *Supponiamo che*

- $a \in \mathbb{R}$
- $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$
- $f \geq 0$
- f *è continua*
- $\exists M \in]0,+\infty[\; : \; \int_a^b f(x)\,dx \leq M \qquad \forall b \in [a,+\infty[$.

In tali ipotesi, l'integrale improprio di f *su* $[a,+\infty[$ *è il numero reale*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Dimostrazione. Siano $b_1 , b_2 \in [a,+\infty[$, $b_1 \leq b_2$. Poiché $b_1 \leq b_2$ e $f \geq 0$, risulta

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \geq 0 \;;$$

quindi

$$\int_a^{b_2} f(x)\,dx = \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \geq \int_a^{b_1} f(x)\,dx\,.$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è una funzione crescente e limitata superiormente. Pertanto converge. ◊

Teorema 7.1.15 *Supponiamo che*

- $a \in \mathbb{R}$
- $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$
- $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$
- $0 \leq f \leq g$
- f *e* g *sono continue*
- g *è dotata di integrale improprio su* $[a, +\infty[$.

In tali ipotesi, f *è dotata di integrale improprio su* $[a, +\infty[$ *e risulta*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Poiché $0 \leq f$ e $0 \leq g$, le funzioni (di b)