CAPITOLO 9

CALCOLO CON LE FUNZIONI ELEMENTARI [◊]

9.1 Funzioni elementari

9.1.1 Funzione potenza con esponente intero

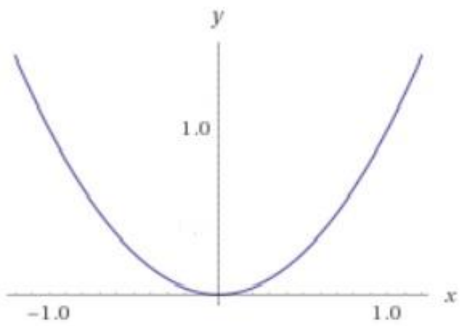
Ricordiamo che

- un numero reale x è chiamato *intero* se $x = 0$ oppure $x \in \mathbb{N}$ oppure $-x \in \mathbb{N}$
- l'insieme di tutti i numeri interi è denotato con $\mathbb{Z}$.

Definizione 9.1.1 Siano $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Chiamiamo *potenza n-esima di x* , e denotiamo x^n , il numero reale

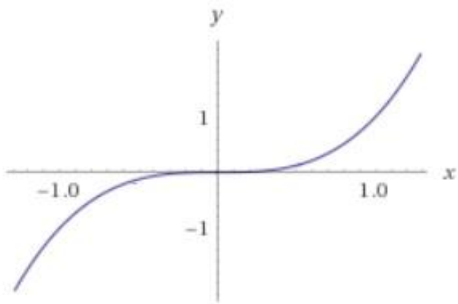
[◊] A. Maceri, *Calcolo con le funzioni elementari*, e-ISBN 978-88-85929-84-5, © Accademica 2021

- $x^n = 1$, se $n = 0$
- $x^n = x$, se $n = 1$
- $x^n = x^{n-1}x$, se $n \in \mathbb{N} - \{1\}$
- $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$, se $n < 0$ e $x \neq 0$.



x^n (n intero positivo pari)

Fig. 9.1.1

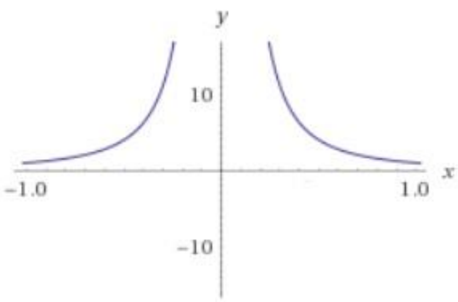


x^n (n intero positivo dispari)

Fig. 9.1.2

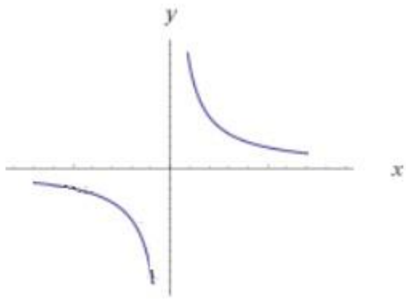
La funzione x^n è chiamata *funzione potenza con esponente intero* n . Inoltre

- se l'intero n è positivo e pari, allora la funzione x^n ha *dominio* $\mathbb{R}$ e *codominio* $[0, +\infty[$ (vedi fig. 9.1.1)
- se l'intero n è positivo e dispari, allora la funzione x^n ha *dominio* $\mathbb{R}$ e *codominio* $\mathbb{R}$ (vedi fig. 9.1.2)
- se l'intero n è positivo e pari, allora la funzione x^{-n} ha *dominio* $\mathbb{R} - \{0\}$ e *codominio* $]0, +\infty[$ (vedi fig. 9.1.3)
- se l'intero n è positivo e dispari, allora la funzione x^{-n} ha *dominio* $\mathbb{R} - \{0\}$ e *codominio* $\mathbb{R} - \{0\}$ (vedi fig. 9.1.4). ◊



x^{-n} (n intero positivo pari)

Fig. 9.1.3



x^{-n} (n intero positivo dispari)

Fig. 9.1.4

Ricordiamo che $\forall\, n\,,m \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\forall\, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ha:

- $x^n x^m = x^{n+m}$
- $\dfrac{y^n}{y^m} = y^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$
- $(xy)^n = x^n y^n$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.

Quanto agli *estremi*, si ha:

- se l'intero n è positivo e pari
  - ✓ $\min\limits_{\mathbb{R}} x^n = 0$ (vedi fig. 9.1.1)

- ✓ $\sup_{\mathbb{R}} x^n = +\infty$ (vedi fig. 9.1.1)

- ○ se l'intero n è positivo e dispari
  - ✓ $\inf_{\mathbb{R}} x^n = -\infty$ (vedi fig. 9.1.2)
  - ✓ $\sup_{\mathbb{R}} x^n = +\infty$ (vedi fig. 9.1.2)

- ○ se l'intero n è positivo e pari
  - ✓ $\inf_{\mathbb{R}-\{0\}} x^{-n} = 0$ (vedi fig. 9.1.3)
  - ✓ $\sup_{\mathbb{R}-\{0\}} x^{-n} = +\infty$ (vedi fig. 9.1.3)

- ○ se l'intero n è positivo e dispari
  - ✓ $\inf_{\mathbb{R}-\{0\}} x^{-n} = -\infty$ (vedi fig. 9.1.4)
  - ✓ $\sup_{\mathbb{R}-\{0\}} x^{-n} = +\infty$ (vedi fig. 9.1.4).

Quanto alla *monotonia*, si ha:

- ○ se l'intero n è positivo e pari, allora la funzione x^n
  - ✓ è strettamente crescente su $[0, +\infty[$ (vedi fig. 9.1.1)
  - ✓ è strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$ (vedi fig. 9.1.1)

- ○ se l'intero n è positivo e dispari, allora la funzione x^n
  - ✓ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (vedi fig. 9.1.2)

- se l'intero n è positivo e pari, allora la funzione x^{-n}
  - ✓ è strettamente crescente su $]-\infty, 0[$ (vedi fig. 9.1.3)
  - ✓ è strettamente decrescente su $]0, +\infty[$ (vedi fig. 9.1.3)

- se l'intero n è positivo e dispari, allora la funzione x^{-n}
  - ✓ è strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ (vedi fig. 9.1.4)
  - ✓ è strettamente decrescente su $]0, +\infty[$ (vedi fig. 9.1.4).

Quanto ai *limiti*, si ha:

- se l'intero n è positivo e pari
  - ✓ $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (vedi fig. 9.1.1)
  - ✓ $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (vedi fig. 9.1.1)

- se l'intero n è positivo e dispari
  - ✓ $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ (vedi fig. 9.1.2)
  - ✓ $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (vedi fig. 9.1.2)

- se l'intero n è positivo e pari
  - ✓ $\lim_{x\to+\infty} x^{-n} = 0$ sicché l'asse x è asintoto orizzontale a destra (vedi fig. 9.1.3)
  - ✓ $\lim_{x\to0^+} x^{-n} = +\infty$ sicché l'asse y è asintoto verticale a

destra (vedi fig. 9.1.3)

- ✓ $\lim_{x \to 0^-} x^{-n} = +\infty$ sicché l'asse y è asintoto verticale a sinistra (vedi fig. 9.1.3)
- ✓ $\lim_{x \to -\infty} x^{-n} = 0$ sicché l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra (vedi fig. 9.1.3)

- o se l'intero n è positivo e dispari
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} x^{-n} = 0$ sicché l'asse x è asintoto orizzontale a destra (vedi fig. 9.1.4)
  - ✓ $\lim_{x \to 0^+} x^{-n} = +\infty$ sicché l'asse y è asintoto verticale a destra (vedi fig. 9.1.4)
  - ✓ $\lim_{x \to 0^-} x^{-n} = -\infty$ sicché l'asse y è asintoto verticale a sinistra (vedi fig. 9.1.4)
  - ✓ $\lim_{x \to -\infty} x^{-n} = 0$ sicché l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra (vedi fig. 9.1.4).

Quanto alla *continuità,* la funzione potenza con esponente intero n è continua.

Quanto alla *derivabilità,* per ogni $n \in \mathbb{Z}$ risulta

(9.1.1) $$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \;.$$

Infatti, si ha ovviamente

(9.1.2) $$\frac{dx}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 \ .$$

Quindi, se $n > 0$ risulta

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = x^{n-1}\frac{dx}{dx} + \cdots + x^{n-1}\frac{dx}{dx} = nx^{n-1} \,.$$

Inoltre, si ha ovviamente

(9.1.3) $$\frac{dx^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = -\frac{1}{x^2} \ .$$

Quindi, se $n > 0$ si ha

$$\frac{dx^{-n}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -nx^{-n-1} \,.$$

Quanto alla *integrabilità,* è immediato verificare che, $\forall\, n \in \mathbb{Z}\,,$ una primitiva di x^n è $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

9.1.2 Funzione radice $\boldsymbol{n}$-esima ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$)

Definizione 9.1.2 Sia $n \in \mathbb{N}$. La restrizione di x^n a $[0,+\infty[$, i.e. la funzione

$$x^n \;:\; x \in [0,+\infty[\;\to x^n \in [0,+\infty[\,,$$

è strettamente crescente e quindi invertibile. Chiamiamo l'inversa *radice n-esima di x*, e la denotiamo con il simbolo

$$\sqrt[n]{x}\ .$$

Pertanto, la funzione $\sqrt[n]{x}$ ha dominio $[0,+\infty[$, codominio $[0,+\infty[$ e risulta

$$(9.1.4) \qquad \forall\, x \in [0,+\infty[\qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x\ .$$

La (9.1.4) ci consente di considerare l'operazione di estrazione della radice n-esima di x identica alla elevazione di x ad una potenza di esponente $\frac{1}{n}$. Infatti, risulta

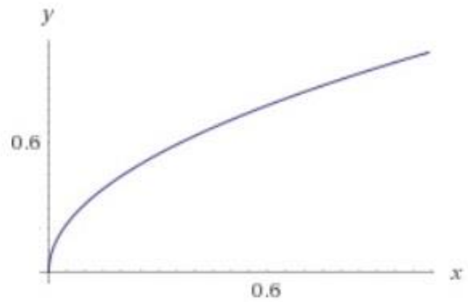
$$\forall\, x \in [0,+\infty[\qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x\,.$$

Così, possiamo scrivere senza distinzione $\sqrt[n]{x}$ oppure $x^{\frac{1}{n}}$. In fig. 9.1.5 mostriamo il diagramma della funzione $\sqrt[n]{x}$ (o $x^{\frac{1}{n}}$).
Se $n = 2$, preferiamo scrivere $\sqrt{x}$ anziché $\sqrt[2]{x}$. ◊

Ricordiamo che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x\,, z \in [0,+\infty[$ risulta

$$\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{xz}$$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\frac{x}{z}}\,.$$



$\sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$

Fig. 9.1.5

Quanto agli *estremi,* risulta

- ✓ $\min\limits_{[0,+\infty[} \sqrt[n]{x} = 0$ (vedi fig. 9.1.5)
- ✓ $\sup\limits_{[0,+\infty[} \sqrt[n]{x} = +\infty$ (vedi fig. 9.1.5).

Quanto alla *monotonia,* la funzione $\sqrt[n]{x}$ è strettamente crescente (vedi fig. 9.1.5)

Quanto ai *limiti*, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \qquad \text{(vedi fig. 9.1.5).}$$

Quanto alla *continuità*, la funzione $\sqrt[n]{x}$ è continua.

Quanto alla *derivabilità*, dimostreremo nel seguito che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione potenza

$$x^{\alpha}$$

è derivabile e risulta

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1} .$$

Quindi

(9.1.5) $$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} .$$

In particolare, si ha

(9.1.6) $$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Quanto all'*integrabilità,* è immediato verificare che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, una primitiva di $\sqrt[n]{x}$ è $\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

Osservazione 9.1.1 Evidenziamo che, se n è dispari, poiché la funzione potenza x^n è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ed ha codominio $\mathbb{R}$, essa possiede anche un'inversa $\sqrt[n]{x}$ strettamente crescente, di dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$. ◊

9.1.3 Funzione esponenziale

Definizione 9.1.3 Sia $a \in \,]0, +\infty[$. Se

- $x \in \mathbb{N}$, allora a^x è definita come prodotto di n fattori ciascuno dei quali è eguale ad a , *i.e.* $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$
- $x = 0$, allora a^x è definita come 1 , *i.e.* $a^0 = 1$

- $x \in \mathbb{N}$, allora a^{-x} è definita come $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $x \in \mathbb{N}$, allora $a^{\frac{1}{x}}$ è definita come $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$
- $x \in \mathbb{N}$, allora $a^{-\frac{1}{x}}$ è definita come $a^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[x]{a}}$
- $x = \frac{h}{k}$, dove $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $\frac{h}{k} > 0$, allora a^x è definita come $a^x = a^{\frac{|h|}{|k|}} = \left(a^{|h|}\right)^{\frac{1}{|k|}} = \sqrt[|k|]{a^{|h|}}$
- $x = \frac{h}{k}$, dove $h \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $\frac{h}{k} < 0$, allora a^x è definita come $a^x = a^{-\frac{|h|}{|k|}} = \left(a^{|h|}\right)^{-\frac{1}{|k|}} = \frac{1}{\sqrt[|k|]{a^{|h|}}} \sqrt[|k|]{a^{|h|}}$.

In tal modo abbiamo definito una funzione a^x il cui dominio è $\mathbb{Q}$ (*i.e.* l'insieme dei numeri razionali) ed il cui codominio è $]0, +\infty[$.
Ebbene, possiamo prolungare la funzione a^x a tutti i numeri irrazionali in modo che la funzione prolungata, che denotiamo ancora con il simbolo a^x, è definita e continua su $\mathbb{R}$. Inoltre, la funzione prolungata possiede la proprietà

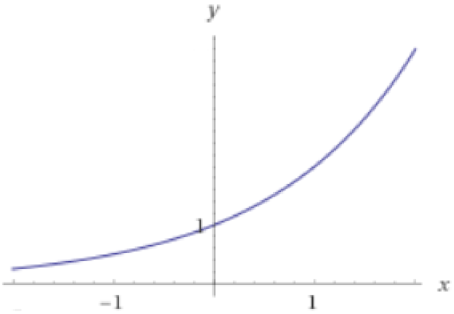
$$\forall\, x , y \in \mathbb{R} \qquad a^{x+y} = a^x a^y \,.$$

Chiamiamo la funzione prolungata a^x *funzione esponenziale di base* a .
Pertanto, il dominio di a^x è $\mathbb{R}$ ed il suo codominio è $]0, +\infty[$. ◊

Osservazione 9.1.2 Poniamo, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $1^x = 1$. ◊

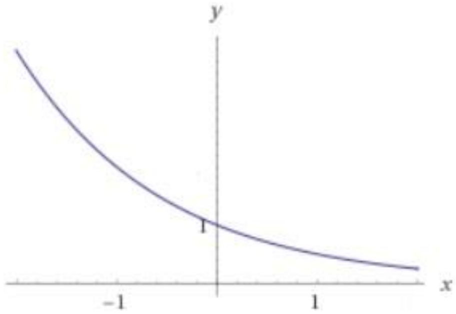
Quanto agli *estremi*, si ha

- $\inf_{\mathbb{R}} a^x = 0$ (vedi figg. 9.1.6 e 9.1.7)
- $\sup_{\mathbb{R}} a^x = +\infty$ (vedi figg. 9.1.6 e 9.1.7)



a^x $(a \in \mathbb{R}\,,\ a > 1)$

Fig. 9.1.6



a^x $(a \in \mathbb{R}\,,\ 0 < a < 1)$

Fig. 9.1.7

Quanto alla *monotonia*, si ha

- se $a > 1$, allora la funzione a^x è strettamente crescente (vedi fig. 9.1.6)

- se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente (vedi fig. 9.1.7).

Quanto ai *limiti*, si ha

- se $a > 1$, allora
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ (vedi fig. 9.1.6)
  - ✓ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ (vedi fig. 9.1.6)

- se $0 < a < 1$, allora
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ (vedi fig. 9.1.7)
  - ✓ $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ (vedi fig. 9.1.7).

Quanto alla c*ontinuità,* la funzione esponenziale a^x è continua.

Teorema 9.1.1 *Sia* $a \in]0, +\infty[$. *Risulta*

(9.1.7)
$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a \ .$$

Dimostrazione. Per il teorema 4.1.31 si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ ,$$

quindi

(9.1.8) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e\,,$$

quindi

(9.1.9) $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\,.$$

Ponendo $\forall\, x>0$

$$f_1(x)=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}$$

$$f_2(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

dove $[x]$ denota il più grande numero intero minore di x , dalla (9.1.8) otteniamo

(9.1.10) $$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=e$$

e dalla (9.1.9) otteniamo

(9.1.11) $$\lim_{x\to+\infty} f_2(x)=e\,.$$

Ovviamente $\forall\, x > 0$

$$f_1(x) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq f_2(x)$$

e quindi, tenendo conto delle (9.1.10), (9.1.11), risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

ed in conseguenza

(9.1.12) $$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e\ .$$

Consideriamo ora la funzione

$$\frac{a^x - 1}{x}$$

che è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ ed in 0 presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ponendo

$$a^x - 1 = y$$

si ha

$$x = \log_a(1 + y)\ ,$$

quindi se x tende a 0 allora y tende a 0 e viceversa, quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}\quad ,$$

quindi, tenendo conto della $(9.1.12)$, risulta

(9.1.13) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\log a\ .\ \diamond$$

Quanto alla *derivabilità*, per ogni $a>0$, tenendo conto della $(9.1.13)$, risulta

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\log a\ ,$$

quindi

(9.1.14) $$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

e quindi, $\forall\, n\in\mathbb{N}$

(9.1.15) $$\frac{d^n}{dx^n}e^x=e^x\ .$$

Pertanto, per il teorema 8.2.14 (*Taylor*), $\forall\, x \in \mathbb{R}$ risulta

$$(9.1.16) \qquad e^x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \ .$$

Quanto all'*integrabilità*, è immediato verificare che una primitiva di e^x è e^x.

Osservazione 9.1.3 Evidenziamo che $\forall\, x\,, y \in \mathbb{R}$

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. ◊

9.1.4 Funzione logaritmo

Definizione 9.1.4 Sia $a \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$. La funzione esponenziale a^x è strettamente monotona su $\mathbb{R}$ e quindi invertibile. La sua funzione inversa è chiamata *funzione logaritmo in base* a ed è denotata

$$\log_a y \,.$$

Quindi, la funzione logaritmo in base a ha dominio $]0,+\infty[$ e codominio $\mathbb{R}$. Inoltre, sussistono le eguaglianze

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \log_a a^x = x$$

$$\forall\, x \in \,]0,+\infty[\qquad a^{\log_a x} = x \;.$$

Se a è il numero di *Napier* [9.1.1] e , si preferisce scrivere

$$\log x$$

piuttosto che $\log_e x$. ◊

Osservazione 9.1.4 Sia $a \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$. Banalmente, si ha

$$\log_a 1 = 0 \,. \;\; ◊$$

Evidenziamo che $\forall\, x\,, y \in \,]0,+\infty[$ risulta

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

[9.1.1] *John Napier* , Edinburgh (Scotland) 01.02.1550 – Edinburgh 04.04.1617.

sicché

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \,. \tag{9.1.17}$$

Sostituendo a x , nella (9.1.16) , $\frac{x}{y}$ si ottiene

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \,. \tag{9.1.18}$$

Si ha anche $\forall\, x \in \,]0,+\infty[$

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y\log_a x}$$

e quindi $\forall a \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$ e $\forall\, x \in \,]0,+\infty[$

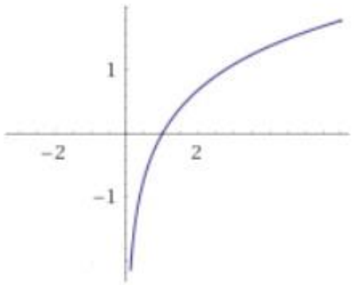
$$\log_a(x^y) = \; y \, log_a x \;. \tag{9.1.19}$$

Infine, $\forall\, a\,, b \in \,]0,1[\, \cup \,]1,+\infty[$ risulta

$$a^{(\log_a b)\cdot(\log_b a)} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a \;,$$

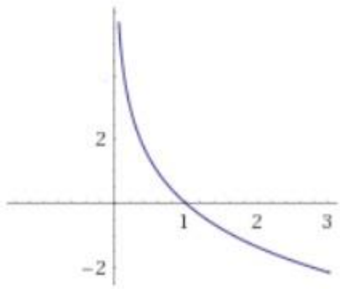
quindi risulta

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \ . \qquad (9.1.20)$$



$\log_a x \quad (a \in \,]1,+\infty[)$

Fig. 9.1.8



$\log_a x \quad (a \in \,]0,1[)$

Fig. 9.1.9

Quanto agli *estremi*, si ha per $a \in \,]1,+\infty[$ e per $a \in \,]0,1[$

- $\inf\limits_{]0,+\infty[} \log_a x = -\infty$ (vedi figg. 9.1.8 e 9.1.9)
- $\sup\limits_{]0,+\infty[} \log_a x = +\infty$ (vedi figg. 9.1.8 e 9.1.9).

Quanto alla *monotonia,* si ha

- se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente (vedi fig. 9.1.8)
- se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente (vedi fig. 9.1.9).

Quanto ai *limiti*,

- se $a > 1$, si ha
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ (vedi fig. 9.1.8)
  - ✓ $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ e quindi l'asse y è asintoto verticale a destra (vedi fig. 9.1.8)

- se $0 < a < 1$, si ha
  - ✓ $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ (vedi fig. 9.1.9)
  - ✓ $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ e quindi l'asse y è asintoto verticale a destra (vedi fig. 9.1.9).

Quanto alla *continuità,* la funzione logaritmo è continua.

Quanto alla derivabilità, per il teorema 6.1.7, ponendo $y = f(x)$ risulta

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

i.e.

$$\frac{d}{dy}\log_a y = \frac{1}{\frac{d}{dx}a^x} = \frac{1}{a^x \log a} = \frac{1}{y \log a}$$

i.e.