1.1 Introduzione [1.1.1]

1.1.1 Spazi lineari su $\mathfrak{R}$ [1.1.2]. Chiamiamo *spazio lineare* su $\mathfrak{R}$ o *spazio lineare reale* o *spazio vettoriale* su $\mathfrak{R}$ un insieme $\boldsymbol{V}$

- munito di una legge (detta *addizione*) che associa ad ogni elemento ($\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$) di $\boldsymbol{V}$x$\boldsymbol{V}$ un elemento $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ di $\boldsymbol{V}$ ed ha le proprietà
  - (1.1.1) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V} \qquad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (*commutativa*)
  - (1.1.2) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \qquad \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ (*associativa*)
  - (1.1.3) esiste un elemento di $\boldsymbol{V}$, detto *zero* e denotato con $\boldsymbol{0}$, tale che $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$
  - (1.1.4) $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ esiste un elemento di $\boldsymbol{V}$, denotato con $-\boldsymbol{x}$, tale che $-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

- munito di una legge (detta *moltiplicazione*) che associa ad ogni elemento $(\lambda,\boldsymbol{x})$ di $\mathfrak{R}$x$\boldsymbol{V}$ un elemento di $\boldsymbol{V}$, denotato $\lambda\boldsymbol{x}$ e detto prodotto di $\boldsymbol{x}$ per lo *scalare* λ

[1.1.1] A. Maceri, *Teoria dei vettori*, e-ISBN 978-88-85929-21-0,

[1.1.2] Denotiamo con $\mathfrak{R}$ l'insieme dei numeri reali.

- dotato delle proprietà

  - $(1.1.5)\quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$ (*distributiva*)
  - $(1.1.6)\quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$ (*distributiva*)
  - $(1.1.7)\quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad (\lambda\mu)\boldsymbol{x} = \lambda(\mu\boldsymbol{x})$
  - $(1.1.8)\quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \quad 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Le relazioni da $(1.1.1)$ a $(1.1.8)$ sono dette *assiomi di spazio lineare*. Gli elementi di $\boldsymbol{V}$ sono anche detti ***vettori***.

OSSERVAZIONE 1.1.1 Usando gli assiomi da $(1.1.1)$ a $(1.1.8)$ è facile provare che uno spazio lineare $\boldsymbol{V}$ ha le proprietà

- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \quad 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (-\lambda)\boldsymbol{x} = \lambda(-\boldsymbol{x}) = -(\lambda\boldsymbol{x})$
- $\forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad \lambda\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} - \{\boldsymbol{0}\} \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}) \Rightarrow (\lambda = 0)$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} - \{\boldsymbol{0}\}$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}) \Rightarrow (\lambda = \mu)$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda \in \mathfrak{R} - \{0\} \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \quad -(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$, denotando con $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ l'elemento $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$, risulta $\boldsymbol{x} - (-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. □

OSSERVAZIONE 1.1.2 Uno spazio lineare non è mai vuoto, perchè ha sempre l'elemento **0**. □

Supponiamo che $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ [risp. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$] siano $n \in \boldsymbol{N}$ [1.1.3] elementi di uno spazio lineare $\boldsymbol{V}$. Con successive operazioni definiamo l'elemento

$$\Big(\big((\lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \lambda_2 \boldsymbol{x_2}) + \lambda_3 \boldsymbol{x_3}\big) + \cdots\Big) + \lambda_n \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{V}.$$

Questo elemento è denotato

$$\lambda_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x_i}$$

ed è chiamato *combinazione lineare finita degli elementi* $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ *con coefficienti* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *in* $\mathfrak{R}$. Dagli assiomi (1.1.1) e (1.1.2) segue ovviamente che eseguendo le successive operazioni in un altro ordine, o raggruppando alcune operazioni, si ottiene lo stesso elemento $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x_i}$.

OSSERVAZIONE 1.1.3 Si dimostra facilmente che un sottoinsieme non vuoto $\boldsymbol{Q}$ di uno spazio lineare $\boldsymbol{V}$ su $\mathfrak{R}$, soddisfacente le relazioni

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q})$$
$$(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q} \text{ e } \lambda \in \mathfrak{R}) \Rightarrow (\lambda \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q})$$

è uno spazio lineare su $\mathfrak{R}$. $\boldsymbol{Q}$ è detto *sottospazio lineare di* ***V*** *su* $\mathfrak{R}$. □

[1.1.3] Denotiamo con $\boldsymbol{N}$ l'insieme dei numeri interi positivi.

Si dice che uno spazio lineare $\boldsymbol{V}$ su $\boldsymbol{\Re}$ è uno *spazio lineare ordinato* se $\boldsymbol{V}$ è un insieme ordinato [1.1.4] e sono soddisfatte le seguenti condizioni

- (1.1.9) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V} \quad (\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
- (1.1.10) $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ e $\forall \lambda \in \boldsymbol{\Re} \quad (\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ e $\lambda \geq 0) \Rightarrow (\lambda \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0})$.

Siano

- $\boldsymbol{V}$ uno spazio lineare su $\boldsymbol{\Re}$
- $n \in \boldsymbol{N}$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{V}$.

Si dice che gli elementi $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono *linearmente dipendenti* se esistono *n* numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{0}\,.$$

Siano

- $\boldsymbol{V}$ uno spazio lineare su $\boldsymbol{\Re}$
- $n \in \boldsymbol{N}$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{V}$.

[1.1.4] Un insieme *V* è detto *ordinato* se esiste una relazione d'ordine in *V*. Si dice che una relazione $\leq$ in un insieme *V* è una *relazione d'ordine in V* se *antisimmetrica* (cioè $\forall x, y \in V \quad (x \leq y$ e $y \leq x) \Rightarrow (x = y)$), *transitiva* (cioè $\forall x, y, z \in V \quad (x \leq y$ e $y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$) e *riflessiva* (cioè $\forall x \in V \quad x \leq x$).

Si dice che gli elementi $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono *linearmente indipendenti* se $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{R}^n - (0, \dots, 0)$ risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i} \neq \mathbf{0} .$$

OSSERVAZIONE 1.1.4 Ovviamente l'elemento **0**=(0,...,0) è linearmente dipendente e ogni $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} - \{\mathbf{0}\}$ è linearmente indipendente. □

OSSERVAZIONE 1.1.5 Consideriamo *n* elementi $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ linearmente dipendenti di uno spazio lineare reale ***V***. E' immediato provare che ciascuno di essi è combinazione lineare dei rimanenti. □

Siano

- $\boldsymbol{V}$ uno spazio lineare su $\mathfrak{R}$
- $n \in \boldsymbol{N}$
- $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{V}$.

Si dice che il sottoinsieme $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ è una *base per **V** di dimensione n* se

- gli elementi $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti
- $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \quad \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{R}^n$ tale che $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{v_i}$.

Sia $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ una *base di dimensione n* per uno spazio lineare reale ***V***. Poichè gli elementi $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ sono linearmente indipendenti, è facile provare che ogni elemento $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ può essere espresso in un unico modo come combinazione lineare di $\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}$. Quindi, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ chiamiamo λ_i *componente i-esima di* $\boldsymbol{v}$ *nella base* $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$.

Sia $\{\boldsymbol{v_1}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ una *base di dimensione n* per uno spazio lineare reale $\boldsymbol{V}$. E' possibile provare che ogni altra base di $\boldsymbol{V}$ è finita ed ha dimensione *n*. Per questo motivo se uno spazio lineare reale $\boldsymbol{V}$ ammette una base di dimensione *n* diciamo che $\boldsymbol{V}$ è uno spazio lineare reale di *dimensione n.*

1.1.2 Lo spazio lineare $\boldsymbol{\Re}^n$. Consideriamo ora un qualsiasi $n \in \boldsymbol{N}$ e l'insieme

$$\boldsymbol{\Re}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \colon \forall i \in \{1, \dots, n\} \;\; x_i \in \boldsymbol{\Re}\}.$$

Evidenziamo subito che esso è il più importante esempio di spazio lineare reale di dimensione *n.* A questo scopo muniamo $\boldsymbol{\Re}^n$ della legge + (*addizione*)

(1.1.11) $$\forall\big(\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)\big) \in \boldsymbol{\Re}^n \times \boldsymbol{\Re}^n \to \\ \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \boldsymbol{\Re}^n$$

e della legge · (*moltiplicazione*)

(1.1.12) $$\forall\big(\lambda, \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)\big) \in \boldsymbol{\Re} \times \boldsymbol{\Re}^n \to \\ \to \lambda \cdot \boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \boldsymbol{\Re}^n.$$

E' immediato verificare che $\boldsymbol{\Re}^n$, munito di tali leggi, soddisfa gli assiomi da (1.1.1) a (1.1.8). Quindi $\mathfrak{R}^n$ è uno spazio lineare reale.

Evidentemente lo zero di $\mathfrak{R}^n$ è $\mathbf{0}$ = (0,...,0) e

- $\forall\lambda \in \mathfrak{R} \quad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $\forall\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n \quad 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
- $\forall\lambda \in \mathfrak{R}$ e $\forall\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (-\lambda)\boldsymbol{x} = \lambda(-\boldsymbol{x}) = -(\lambda\boldsymbol{x})$
- $\forall\lambda \in \mathfrak{R}$ e $\forall\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n - \{\mathbf{0}\} \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \mathbf{0}) \Rightarrow (\lambda = 0)$
- $\forall\lambda, \mu \in \mathfrak{R}$ e $\forall\boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n - \{\mathbf{0}\} \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x}) \Rightarrow (\lambda = \mu)$
- $\forall\lambda \in \mathfrak{R} - \{0\}$ e $\forall\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \quad (\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}) \Rightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$.

Consideriamo i vettori di $\mathfrak{R}^n$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e_1} = (1,0,0,\dots,0)\\ \boldsymbol{e_2} = (0,1,0,\dots,0)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \boldsymbol{e_n} = (0,0,\dots,0,1).\end{gathered}$$

E' facile provare che $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ è una base di dimensione *n* per lo spazio lineare reale $\mathfrak{R}^n$. La chiamiamo *base naturale*. In particolare risulta

(1.1.13) $$\forall\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n \qquad \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e_i}\,.$$

Chiamiamo *distanza Euclidea* tra due qualsiasi punti $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ di $\mathfrak{R}^n$, e denotiamo con il simbolo $dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, il numero reale non negativo

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Ovviamente risulta

(1.1.14) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \quad dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = dist(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$
(1.1.15) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \quad (dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$
(1.1.16) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{R}^n \quad dist(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(1.1.17) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad dist(\lambda \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = |\lambda| dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Dimostriamo ora la seguente importante proprietà, detta *proprietà triangolare* della distanza Euclidea:

[1.1.1] *Risulta*

(1.1.18) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{R}^n \quad dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq dist(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + dist(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che, comunque si scelgano $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{R}^n$, risulta

(1.1.19) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}.$$

A questo scopo poniamo

(1.1.20) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_i = z_i - x_i\,, \;\; b_i = (y_i - z_i)$

e come primo passo proviamo che

(1.1.21) $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2 \right).$$

La $(1.1.21)$ è banalmente vera se $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_i = 0$. Nell'altro caso possibile risulta $\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 > 0$. Di conseguenza, ponendo $a = \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2$, risulta $a > 0$. Inoltre poniamo $b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $c = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2$ e consideriamo l'ovvia relazione

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i - b_i)^2 \right) \geq 0$$

da cui

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 \right) \lambda^{\mathbf{2}} - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) \lambda + \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2 \geq 0$$

da cui

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad a\, \lambda^{\mathbf{2}} - 2\, b\lambda + c \geq 0$$

da cui, poiché $a > 0$

$$\forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad a \left[\left(\lambda - \frac{b}{a} \right)^{\mathbf{2}} + \frac{ac - b^{\mathbf{2}}}{a^2} \right] \geq 0$$

da cui, poiché $a > 0$, segue $ac - b^{\mathbf{2}} \geq 0$. Pertanto la $(1.1.21)$ è vera anche nel caso $\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 > 0$.
Dalla $(1.1.21)$ si trae immediatamente

$$2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 \right)} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2 \right)}$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 \tag{1.1.22}$$

da cui, per la (1.1.20), segue la tesi. ⋄

Siano $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ due qualsiasi vettori di $\mathfrak{R}^n$. Chiamiamo *prodotto scalare* di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, e denotiamo con $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$, il numero reale

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \,. \tag{1.1.23}$$

Le seguenti relazioni sono ovvie

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathfrak{R}^n \qquad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z} \tag{1.1.24}$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \qquad \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x} \tag{1.1.25}$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \ \text{ e } \ \forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad (\lambda \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \tag{1.1.26}$$

Sia $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un qualsiasi vettore di $\mathfrak{R}^n$. Chiamiamo *norma Euclidea* di $\boldsymbol{x}$, e denotiamo con $\|\boldsymbol{x}\|$, il numero reale non negativo

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2} \tag{1.1.27}$$

sicché

(1.1.28) $\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n \qquad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}$.

Dalla (1.1.15) otteniamo immediatamente

(1.1.29) $\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n \qquad (\|\boldsymbol{x}\| = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$.

Dalla (1.1.17) otteniamo immediatamente

(1.1.30) $\quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathfrak{R}^n$ and $\forall \lambda \in \mathfrak{R} \qquad \|\lambda \boldsymbol{x}\| = \lambda \|\boldsymbol{x}\|$.

Inoltre

[1.1.2] *Risulta*

(1.1.31) $\quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \qquad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Dimostrazione. Nella dimostrazione della [1.1.1] abbiamo ottenuto la (1.1.22) con un ragionamento che è valido per ogni $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{R}^n$. Ne segue la tesi. ⋄

Infine sussiste la seguente diseguaglianza di *Cauchy-Schwarz*

[1.1.3] *Risulta*

(1.1.32) $\quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{R}^n \qquad |\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Dimostrazione. Nella dimostrazione della [1.1.1] abbiamo ottenuto la

(1.1.21) con un ragionamento che è valido per ogni $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{R}^n$. Ne segue la tesi. ⋄

Chiaramente ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$ individua nello spazio ad *n* dimensioni sia un *punto P* che il *vettore* di primo estremo 0 e secondo estremo P. Per la (1.1.13), nel *riferimento Cartesiano ortogonale* $(0, e_1, \dots, e_n)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ x_i denota sia la *i-esima coordinata ortogonale* del punto *P* che la *i-esima componente ortogonale* del vettore $\mathbf{0P}$. *Per questo motivo gli elementi di* $\mathfrak{R}^n$*sono chiamati indifferentemente* ***punti*** *o* ***vettori***.

Osservazione 1.1.6 Siano $x, y \in \mathfrak{R}^n$. Quando consideriamo $\|\boldsymbol{x}\|$, chiamiamo $\boldsymbol{x}$ vettore. Quando consideriamo $dist(x, y)$, chiamiamo x, y punti. Quando consideriamo $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$, chiamiamo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vettori. □

Siano x un qualsiasi punto di $\mathfrak{R}^n$, $\boldsymbol{y}$ un qualsiasi vettore di $\mathfrak{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. Il sottoinsieme di $\mathfrak{R}^n$

(1.1.33) $$r = \{z \in \mathfrak{R}^n : z = x + \lambda \boldsymbol{y},\ \ \lambda \in \mathfrak{R}\}$$

è chiamato *retta di* $\mathfrak{R}^n$ *passante per il punto* x *e parallela al vettore* $\boldsymbol{y}$. Le componenti di $\boldsymbol{y}$ sono dette *numeri direttori* di *r*.
Se $\|\boldsymbol{y}\| = 1$, il vettore $\boldsymbol{y}$ è chiamato *versore* di *r* e le sue componenti sono chiamate *coseni direttori* di *r*.

La (1.1.33) è detta *equazione parametrica* di *r*. Se x e y sono due qualsiasi punti distinti di $\mathfrak{R}^n$, un'altra equazione parametrica di *r* è

$$r = \{z \in \mathfrak{R}^n :\ z = x + \lambda(y - x),\ \lambda \in \mathfrak{R}\}.$$

1.2 Vettori di $\mathfrak{R}^3$ [1.2.1]

1.2.1 Fondamenti di Geometria analitica dello spazio. Sia r una retta dello spazio a tre dimensioni. Scegliamo per r un orientamento e come origine uno dei suoi punti. E' noto che è possibile costruire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di r ed $\mathfrak{R}$. In essa ogni punto $A \in r$ individua un numero reale a_1 che chiamiamo *coordinata* (o *ascissa*) di A ed ogni numero reale è l'ascissa di uno ed un solo punto di r.

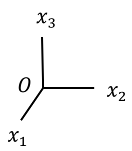

Fig. 1.2.1

Consideriamo tre assi orientati x_1, x_2, x_3 passanti per un punto O dello spazio a tre dimensioni ed a due a due ortogonali. Il sistema O, x_1, x_2, x_3 è chiamato *riferimento Cartesiano ortogonale di origine O e di assi coordinati* x_1, x_2, x_3 (fig. 1.2.1).

Sia P un punto dello spazio a tre dimensioni. Consideriamo il piano α_P [risp. β_P] [risp. γ_P] passante per P e normale a x_1 [risp. x_2] [risp. x_3]. Denotiamo con P_1 [risp. P_2] [risp. P_3] il punto di x_1 [risp. x_2] [risp. x_3]

[1.2.1] A. Maceri, *Teoria dei vettori*, e-ISBN 978-88-85929-21-0, appartenente ad α_P [risp. β_P] [risp. γ_P] e con p_1 [risp. p_2] [risp. p_3] l'ascissa di P_1 [risp. P_2] [risp. P_3] su x_1 [risp. x_2] [risp. x_3]. Chiamiamo p_1 [risp. p_2] [risp. p_3] *prima* [risp. *seconda*] [risp. *terza*] *coordinata Cartesiana ortogonale* di *P*.

Consideriamo un riferimento Cartesiano ortogonale O, x_1, x_2, x_3 e la legge di corrispondenza *f* che ad ogni punto *P* dello spazio a tre dimensioni associa la terna ordinata di numeri reali (p_1, p_2, p_3) costituita dalle coordinate Cartesiane ortogonali di *P*. Chiaramente f è una funzione biunivoca a valori in $\mathfrak{R}^3$ e definita nello spazio a tre dimensioni. Pertanto possiamo indifferentemente denotare con *P* un punto dello spazio a tre dimensioni oppure un punto (p_1, p_2, p_3) di $\mathfrak{R}^3$. E' in questo senso che scriviamo $P = (p_1, p_2, p_3)$.

Siano $A = (a_1, a_2, a_2)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ due punti dello spazio a tre dimensioni. Chiamiamo *distanza tra A e B* o *lunghezza del segmento AB*, e denotiamo col simbolo $dist(A, B)$, il numero reale non negativo

(1.2.1) $$dist(A, B) = ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ovviamente

(1.2.2) $$(A = B) \Leftrightarrow (b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (dist(A, B) = 0)$$

(1.2.3) $$(A \neq B) \Leftrightarrow (dist(A, B) > 0).$$

Siano $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ due punti distinti di $\mathfrak{R}^3$. Per la (1.2.3) possiamo considerare i numeri reali

(1.2.4) $$r_1 = \frac{b_1 - a_1}{dist(A,B)} \ , r_2 = \frac{b_2 - a_2}{dist(A,B)} \ , \ r_3 = \frac{b_3 - a_3}{dist(A,B)} \ .$$

Evidentemente

(1.2.5) $$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$$

sicchè r_1 , r_2 , r_3 non possono mai essere tutti nulli.

Consideriamo ora il sottoinsieme di $\mathfrak{R}^3$

(1.2.6) $$r = \{(a_1 + t\, r_1, a_2 + t\, r_2, a_3 + t\, r_3) \in \mathfrak{R}^3 : t \in \mathfrak{R}\} .$$

Poichè $t_A = 0 \in \mathfrak{R}$ [risp. $t_B = dist(A,B) \in \mathfrak{R}$] risulta $A \in r$ [risp. $B \in r$]. Perciò chiamiamo il sottoinsieme r *retta orientata di* $\mathfrak{R}^3$ *individuata dai punti A e B* o *retta orientata di* $\mathfrak{R}^3$ *passante per i punti A e B*. Chiamiamo *orientazione naturale di r* l'orientazione da *A* verso *B*.
Se $P = (p_1, p_2, p_3) \in r$, $\exists\, t_P \in \mathfrak{R}$ tale che $p_1 = a_1 + t_P\, r_1,\ p_2 = a_2 + t_P\, r_2, p_3 = a_3 + t_P\, r_3$. Da ciò e dalla (1.2.5) otteniamo $dist(P,A) = |t_P|$. Inoltre se $t_P > 0$ allora P segue A nell'orientazione naturale di r.

Chiamiamo il numero r_1 [risp. r_2] [risp. r_3] *primo* [risp. *secondo*] [risp. *terzo*] *coseno direttore* di *r*. Inoltre chiamiamo il numero $b_1 - a_1$ [risp. $b_2 - a_2$] [risp. $b_3 - a_3$] *primo* [risp. *secondo*] [risp. *terzo*] *numero direttore* di r.

OSSERVAZIONE 1.2.1 *r* è anche chiamata *retta orientata di* $\mathfrak{R}^3$ *passante per il punto A e di coseni direttori* r_1 , r_2 , r_3 . □