Aldo Maceri

Topologia di base

(Capitolo 3 del trattato Analisi Matematica)

Accademica

Prof. Ing. Aldo Maceri
già Professore ordinario di Scienza delle Costruzioni
Università di Roma “Roma Tre”
Dipartimento di Ingegneria
Italia
www.aldo-maceri.com

https://www.accademica.eu

ISBN 978-88-85929-78-4

Aldo Maceri - *Topologia di base (cap. 3 del trattato Analisi Matematica)*

PREFAZIONE

L'Analisi Matematica è una disciplina vastissima, che sembra non aver confini. E' la sola disciplina che dà certezze alla mente umana, ma richiede a coloro che la usano un assoluto rigore logico.

L'Analisi Matematica risponde alle necessità di matematici, di scienziati e di ingegneri che operano nelle più avanzate frontiere dei loro settori. Essi spesso devono ricorrere all'Analisi Matematica moderna per formulare i loro particolari problemi. Non di rado essi devono anche perfezionare alcuni risultati della Analisi Matematica moderna per poter risolvere i loro particolari problemi.

Questo libro è un'introduzione alla Analisi Matematica, scritta per lo studio individuale. Per leggere il libro non sono necessari prerequisiti. Questo libro concerne l'Analisi Matematica reale classica, cioè lo studio dell'insieme dei numeri reali e lo studio (continuità, derivazione e integrazione) delle funzioni reali di una o più variabili reali.

La totale autonomia, il rigore della esposizione, la moderna e generale impostazione rendono questo libro una base di partenza utile anche per l'impegnativo studio della Analisi Matematica moderna. Tuttavia, esso si colloca al livello elementare per l'abbondanza, forse eccessiva, delle spiegazioni, dei chiarimenti e dei dettagli.

Aldo Maceri

Aprile 2021

Roma, Italia

INDICE

PREFAZIONE

CAPITOLO 1 TEORIA DEGLI INSIEMI…...................... 1

1.1 INSIEMI…………………………....………… 1

1.1.1 Introduzione………………………......... 1
1.1.2 Operazioni sugli insiemi…………......... 3
1.1.3 Relazioni……………………………….. 7
1.1.4 Funzioni..……………………………… 12
1.1.5 Algebra degli insiemi………………….. 16

1.2 L'INSIEME DEI NUMERI REALI………….. 21

1.2.1 L'insieme dei numeri naturali.……… 21
1.2.2 L'insieme dei numeri interi..………… 24
1.2.3 L'insieme dei numeri razionali……… 32
1.2.4 L'insieme dei numeri reali…………… 37
1.2.5 Rappresentazione dei numeri reali….. 52
1.2.6 L'insieme ampliato dei numeri reali… 55
1.2.7 Qualche utile strumento…………….. 57

1.3 L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI……… 62

1.3.1 Introduzione…..………………………. 62
1.3.2 Forma algebrica………………………. 64
1.3.3 Forma trigonometrica…………… … 66

CAPITOLO 2 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI… 70

2.1 MATRICI………………………….....…… 70

2.1.1 Spazi vettoriali…..………………….. 70
2.1.2 Matrici…………………..……….. 75
2.1.3 Operazioni sulle matrici……………. 78

2.2 DETERMINANTI.............................. 83

2.2.1 Analisi combinatoria..................... 83
2.2.2 Determinanti................................ 88
2.2.3 Proprietà dei determinanti................ 92
2.2.4 Minori....................................... 99

2.3 SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI........... 111

2.3.1 Introduzione................................ 111
2.3.2 Soluzione del problema.................... 114
2.3.3 Metodo di eliminazione di Gauss......... 120

2.4 IL PROBLEMA DEGLI AUTOVALORI....... 124

2.4.1 Autovalori ed autovettori................ 124

CAPITOLO 3 TOPOLOGIA DI BASE.................. 128

3.1 SPAZI METRICI.................................. 128

3.1.1 Introduzione................................ 128
3.1.2 Spazio metrico.............................. 130
3.1.3 Insieme aperto. Intorno di un punto..... 132
3.1.4 Punto di accumulazione. Chiuso........ 134
3.1.5 Compatto.................................... 138

3.2 LO SPAZIO METRICO $\mathbb{R}^n$.................. 140

3.2.1 Il caso $\mathbb{R}$.................................. 140
3.2.2 Il caso n maggiore di 1.................. 143

CAPITOLO 4 SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE.. 149

4.1 SUCCESSIONI DI NUMERI REALI............. 149

4.1.1 Successioni regolari...................... 149
4.1.2 Operazioni sui limiti...................... 162
4.1.3 Massimo e minimo limite.................. 175

4.1.4 Successioni di Cauchy…..……….. 182
4.1.5 Il numero e………………………. 183

4.2 SERIE DI NUMERI REALI…..………………… 186

4.2.1 Introduzione..…………………………. 186
4.2.2 Serie a termini non negativi…………… 191
4.2.3 Assoluta convergenza………………… 195

4.3 SUCCESSIONI DI K-UPLE DI NUMERI REALI… 195

4.3.1 Successioni convergenti…………… 195
4.3.2 Successioni estratte………….......... 199

CAPITOLO 5 LIMITI E CONTINUITA'…………….. 203

5.1 LIMITE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE……………………………..……. 203

5.1.1 Introduzione………………………….. 203
5.1.2 Limiti………………………………… 213
5.1.3 Operazioni sui limiti…………………. 248
5.1.4 Massimo e minimo limite……………. 260
5.1.5 Altre proprietà dei limiti..……………. 275

5.2 LIMITE DI FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI……………………………….……… 287

5.2.1 Introduzione…………………………… 287
5.2.2 Limiti..………………………………… 292

5.3 CONTINUITÀ DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE……………………… 303

5.3.1 Continuità……………………………... 304
5.3.2 Uniforme continuità……………….….. 314

5.4 CONTINUITÀ DI FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI…..……………………… 316

5.4.1 Continuità……………………………… 316

CAPITOLO 6 DERIVAZIONE…………………… 325

6.1 DERIVAZIONE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE…………………….. 325

6.1.1 Derivata…………………...…..…… 325
6.1.2 Teoremi del valor medio..…………. 346
6.1.3 Estremi relative..…………………… 356
6.1.4 Formula di Taylor….……………… 365
6.1.5 Regola di L'Hospital…..………….. 376

6.2 DERIVAZIONE DI FUNZIONI REALI DI PIÙ VARIABILI REALI…………………………… 382

6.2.1 Derivata parziale…………………… 382
6.2.2 Funzioni differenziabili…………….. 391
6.2.3 Derivata della funzione composta….. 399
6.2.4 Derivata direzionale…..……………. 407
6.2.5 Estremi relativi.……………………. 414
6.2.6 Funzioni implicite………………….. 427

Capitolo 7 INTEGRAZIONE……………………… 435

7.1 INTEGRALE DEFINITO……..………………… 435

7.1.1 Definizione di integrale definito…….. 435
7.1.2 Proprietà dell'integrale definito……… 446
7.1.3 Integrale improprio………………….. 462

7.2 INTEGRALE CURVILINEO…………………… 467

7.2.1 Curve di $\mathbb{R}^n$………………….............. 467
7.2.2 Curve regolari di $\mathbb{R}^n$…….…………. 471
7.2.3 Integrale curvilineo………………….. 495
7.2.4 Forme differenziali…..………………. 499

7.3 INTEGRALE MULTIPLO……………………… 506

7.3.1 Insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$…………… 506
7.3.2 Integrale doppio…………………… 513
7.3.3 Teoremi fondamentali……………… 522
7.3.4 Integrale triplo…….……………….. 551

7.4 INTEGRALE SUPERFICIALE….………..…….. 553

7.4.1 Superfici regolari…..……..………… 553
7.4.2 Integrale superficiale………………... 569

Capitolo 8 SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI…. 581

8.1 SUCCESSIONI DI FUNZIONI……………… 581

8.1.1 Uniforme convergenza…………… 581

8.2 SERIE DI FUNZIONI…..…………………… 589

8.2.1 Uniforme convergenza…..………….. 589
8.2.2 Serie di potenze…..…………………. 598
8.2.3 Serie di Fourier…………………….. 611

Capitolo 9 CALCOLO CON LE FUNZIONI ELEMENTARI 613

9.1 FUNZIONI ELEMENTARI…………………… 613

9.1.1 Funzione potenza con esponente intero 613
9.1.2 Funzione radice n-esima ($n \in \mathbb{N}$)….. 619
9.1.3 Funzione esponenziale……………….. 622
9.1.4 Funzione logaritmo..………………… 629
9.1.5 Funzione potenza con esponente reale non intero…………………………… 633
9.1.6 Funzioni trigonometriche…………… 638
9.1.7 Funzioni trigonometriche inverse…… 648
9.1.8 Funzioni iperboliche…..…………….. 653

9.2 CALCOLO…………………………………… 657

9.2.1 Limiti……………………...................... 657
9.2.2 Derivate ordinarie……………………. 672
9.2.3 Derivate parziali……..………………. 691
9.2.4 Integrali definiti…..…………….…….. 695
9.2.5 Integrali multipli……………………… 711
9.2.6 Integrali curvilinei……………………. 721
9.2.7 Integrali superficiali…………………… 722

Capitolo 10 EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE 726

10.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE 726

10.1.1 Introduzione………………................. 726
10.1.2 Equazioni differenziali lineari……….... 728

10.2 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE MAGGIORE DI 1…………………………….. 737
10.2.1 Introduzione…………………………. 737
10.2.2 Equazioni differenziali lineari……….. 738
10.2.3 Equazioni differenziali a coefficienti costanti……………………………….. 753
10.2.4 Esempi……………………………….. 763

BIBLIOGRAFIA

CAPITOLO 3

TOPOLOGIA DI BASE

3.1 Spazi metrici

3.1.1 Introduzione

Abbiamo visto nella sezione 2.1.1 che l'insieme $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\})$, munito con le operazioni

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha\, x_n)$$

(dove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$), è uno spazio vettoriale sul campo reale.

Definizione 3.1.1 Lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, munito con il *prodotto interno* (o *prodotto scalare*)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{3.1.1}$$

e con la *norma*

$$|\,\boldsymbol{x}| = |(x_1, \dots, x_n)| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1.2}$$

è chiamato *spazio Euclideo ad* n *dimensioni*. ◊

Teorema 3.1.1 [*diseguaglianza di Schwarz*] *Se*

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *ed* $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *allora*

$$\text{(3.1.3)} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Dimostrazione. Poniamo

$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Se $B = 0$, la (3.1.3) è ovviamente vera. Se $B > 0$, risulta $0 \leq \sum_{i=1}^{n}(Bx_i - Cy_i)^2 = B^2A + BC^2 - 2BC^2 = B(BA - C^2)$; quindi $BA - C^2 \geq 0$; quindi la (3.1.3) è vera. ◊

Teorema 3.1.2 *Supponiamo che* $n \in \mathbb{N}$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$; $\alpha \in \mathbb{R}$. *Allora risulta*

(3.1.4) $\quad |\boldsymbol{x}| \geq 0$

(3.1.5) $\quad (|\boldsymbol{x}| = 0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$

(3.1.6) $\quad |\alpha \boldsymbol{x}| = \boldsymbol{\alpha}\, |\boldsymbol{x}|$

(3.1.7) $\quad |\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$

(3.1.8) $\quad |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$

(3.1.9) $\quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

Dimostrazione. E' immediato verificare che le (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6). (3.1.7) seguono dal teorema 3.1.1. Dalla (3.1.7) si trae

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \\ \leq |\boldsymbol{x}|^2 + 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{x}|^2 = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2 , \end{aligned}$$

sicché la (3.1.8) è provata. La (3.1.9) segue dalla (3.1.8) sostituendo $\boldsymbol{x}$ con $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$. ◊

Osservazione 3.1.1 La 3.1.5 implica $(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0) \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}) \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. ◊

3.1.2 Spazio metrico

Definizione 3.1.2 Sia X un insieme non vuoto. Diciamo che X è uno *spazio metrico* se esiste una funzione d , chiamata *distanza* (o *metrica*) che ad ogni coppia di punti p e q di X associa un numero reale $d(p,q)$, chiamato *distanza tra* p *e* q , tale che

(3.1.10) $\quad (p \neq q) \quad \Rightarrow \quad (d(p,q) > 0)$

(3.1.11) $\quad d(p,p) = 0$

(3.1.12) $\quad d(p,q) = d(q,p)$

(3.1.13) $\quad d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ per ogni $r \in X$. ◊

Teorema 3.1.3 *Sia* $n \in \mathbb{N}$ *. L'insieme* $\mathbb{R}^n$ *, munito con la funzione*

(3.1.14) $$d : \big(\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \in [0, +\infty[\,,$$

è uno spazio metrico. La distanza $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *è denotata anche con* $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ *.*

Dimostrazione. Infatti, per il teorema 3.1.2 la funzione (3.1.14) soddisfa le condizioni (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13). ◊

Osservazione 3.1.2 Evidenziamo che $\mathbb{R}^n$ è l'esempio più importante di spazio metrico. ◊

Definizione 3.1.3 Siano X uno spazio metrico, $x_0 \in X$, $r \in]0,+\infty[$. Chiamiamo *sfera aperta di* X con *centro* x_0 e con *raggio* r, l'insieme

(3.1.15) $$B_r(x_0) = \{x \in X \ : \ d(x_0,x) < r\} \ .$$

Chiamiamo *sfera chiusa* di X con *centro* x_0 e con *raggio* r, l'insieme di tutti gli $x \in X$ tali che $d(x_0,x) \leq r$. ◊

Definizione 3.1.4 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Diciamo che Y è *limitato* se esistono $r \in]0,+\infty[$ e $x_0 \in X$ tali che

$$\forall y \in Y \qquad d(x_0,y) < r \ .$$ ◊

Osservazione 3.1.3 Evidenziamo che, se X è uno spazio metrico, allora $Y \subseteq X$ è limitato se, e solo se, esiste una sfera aperta di X contenente Y . ◊

Teorema 3.1.4 *Sia X uno spazio metrico. Ogni unione finita di sfere aperte è un sottoinsieme limitato di X .*

Dimostrazione. Ovviamente, basta esaminare il caso di due sfere $B_{r_1}(x_1)$, $B_{r_2}(x_2)$. Consideriamo il numero reale positivo $r = \max\{r_1 + d(x_1,x_2), r_2 + d(x_1,x_2)\}$ ed un qualsiasi punto $x \in B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2)$.
Se $x \in B_{r_1}(x_1)$, risulta $d(x,x_1) < r_1 \leq r_1 + d(x_1,x_2) \leq r$, quindi $x \in B_r(x_1)$.

Se $x \in B_{r_2}(x_2)$, risulta $d(x,x_1) \le d(x,x_2) + d(x_2,x_1) < r_2 + d(x_1,x_2) \le r$, quindi $x \in B_r(x_1)$. Pertanto

$$B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2) \subseteq B_r(x_1)\,. \diamond$$

3.1.3 Aperto. Intorno di un punto

Definizione 3.1.5 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, $x_0 \in Y$. Diciamo che x_0 è un *punto interno di* Y se esiste un numero reale positivo r tale che la sfera aperta $B_r(x_0)$ è contenuta in Y. $\diamond$

Definizione 3.1.6 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Chiamiamo *interno di* Y l'insieme di tutti i punti interni di Y. $\diamond$

Definizione 3.1.7 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Diciamo che Y è un *aperto* (o un *sottoinsieme aperto*) *di* X se ogni punto di Y è un punto interno di Y. $\diamond$

Teorema 3.1.5 *Siano X uno spazio metrico*, $x_0 \in X$, $r \in]0,+\infty[$. *La sfera aperta* $B_r(x_0)$ *è un aperto di* X.

Dimostrazione. Sia x un qualsiasi punto di $B_r(x_0)$. Quindi $d(x_0,x) < r$, quindi $r_1 = r - d(x_0,x) > 0$. Sia y un qualsiasi punto di $B_{r_1}(x)$. Quindi $d(x,y) < r_1 = r - d(x_0,x)$. Ora, dalla (3.1.13) ricaviamo $d(x_0,y) \le d(x_0,x) + d(x,y)$. Di qui, siccome $d(x_0,x) < r - d(x,y)$, otteniamo $d(x_0,y) \le r - d(x,y) + d(x,y) = r$, e con ciò abbiamo dimostrato che $B_{r_1}(x) \subseteq B_r(x_0)$. Pertanto, ogni punto di $B_r(x_0)$ è un punto interno di $B_r(x_0)$. Ne segue che $B_r(x_0)$ è un aperto di X. $\diamond$

Definizione 3.1.8 Siano X uno spazio metrico, $x_0 \in X$.

Chiamiamo *intorno di* x_0 , e denotiamo con il simbolo $N(x_0)$, ogni sottoinsieme aperto di X tale che

(3.1.16) $$x_0 \in N(x_0)\ .\ \diamond$$

Osservazione 3.1.4 Sia $x_0 \in X$. In virtù del teorema 3.1.5, per ogni $r \in]0, +\infty[$ la sfera aperta $B_r(x_0)$ è un intorno di x_0 . ◊

Teorema 3.1.6 *Siano* X *uno spazio metrico*, $Y \subseteq X$. *Le proposizioni seguenti sono equivalenti*

1) Y *è un aperto*
2) *Per ogni* $y \in Y$ *esiste un intorno* $N(y)$ *di* y *tale che* $N(y) \subseteq Y$.

Dimostrazione. Con ogni evidenza, la tesi segue immediatamente dal teorema 3.1.5. ◊

Teorema 3.1.7 *Siano* X *uno spazio metrico*, Y_1 *e* Y_2 *due sottoinsiemi aperti di* X . *Allora* $Y_1 \cap Y_2$ *è un sottoinsieme aperto di* X .

Dimostrazione. Sia $x \in Y_1 \cap Y_2$. Quindi $x \in Y_1$ e $x \in Y_2$, quindi $\exists B_{r_1}(x) \subseteq Y_1$ ed $\exists B_{r_2}(x) \subseteq Y_2$. Posto $r = \min\{r_1, r_2\}$, risulta $r > 0$, $B_r(x) \subseteq B_{r_1}(x) \subseteq Y_1$ e $B_r(x) \subseteq B_{r_2}(x) \subseteq Y_2$. Quindi $B_r(x) \subseteq Y_1 \cap Y_2$, quindi ogni punto di $Y_1 \cap Y_2$ è un punto interno di $Y_1 \cap Y_2$, quindi ogni punto di $Y_1 \cap Y_2$ è un punto interno di X . ◊

Osservazione 3.1.5 Per il teorema 3.1.7, ogni intersezione finita di aperti di X è un aperto di X . Inoltre, ogni intersezione finita di intorni di x_0 è un intorno di x_0 . ◊

Teorema 3.1.8 *Sia* $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in I}$ *una famiglia, con qualsiasi* *insieme di indici I, di aperti di uno spazio metrico X. Allora*

$$\underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$$

è un aperto.

Dimostrazione. Infatti, se $x \in \underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$, esiste $\beta \in I$ tale che $x \in \Omega_\beta$. Poiché Ω_β è aperto, esiste $r \in]0, +\infty[$ tale che $B_r(x) \subseteq \Omega_\beta$. Pertanto, poiché $\Omega_\beta \subseteq \underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$, ogni $x \in \underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$ è un punto interno di $\underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$. Così, $\underbrace{\cup}_{\alpha\in I} \Omega_\alpha$ è un aperto di X. ◊

Definizione 3.1.9 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, $x_0 \in X$. Diciamo che x_0 è un *punto esterno ad* Y se esiste un intorno $N(x_0)$ di x_0 tale che $N(x_0) \cap Y = \emptyset$. ◊

Definizione 3.1.10 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, $x_0 \in X$. Diciamo che x_0 è un *punto di frontiera di* Y se per ogni intorno $N(x_0)$ di x_0 risulta $N(x_0) \cap Y - \{x_0\} \neq \emptyset$ e $N(x_0) \cap Y^c - \{x_0\} \neq \emptyset$. Pertanto, un punto di frontiera di Y *non è* un punto interno di Y e *non è* un punto esterno ad Y. ◊

Definizione 3.1.11 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. L'insieme di tutti i punti di frontiera di Y è denotato con ∂Y ed è chiamato *frontiera* di Y. ◊

3.1.4 Punto di accumulazione. Chiuso

Definizione 3.1.12 Siano X uno spazio metrico, $x_0 \in X$, $Y \subseteq X$. Diciamo che x_0 è un *punto di accumulazione per Y*

se per *ogni* intorno $N(x_0)$ risulta

(3.1.17) $$Y \cap N(x_0) - \{x_0\} \neq \emptyset\,. \quad \diamond$$

Osservazione 3.1.6 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Ovviamente un punto di accumulazione per Y può essere o non essere un punto di Y. ◊

Definizione 3.1.13 Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Se $x_0 \in Y$ ed x_0 non è un punto di accumulazione per Y, diciamo che x_0 è un *punto isolato di* Y. ◊

Definizione 3.1.14 Siano X uno spazio metrico, $\Delta \subseteq X$. Diciamo che Δ è un *chiuso* (oppure un *sottoinsieme chiuso*) di X se il suo complemento Δ^c è un aperto di X. ◊

Teorema 3.1.9 *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, x_0 un punto di accumulazione per Y. Allora ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di Y.*

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo che esiste un intorno $N(x_0)$ di x_0 che contiene soltanto un numero finito di punti di Y. Allora $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che $x_1, \dots, x_k \in Y$ e $N(x_0) \cap Y - \{x_0\} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Posto $r = \min\{d(x_0, x_1), \dots, d(x_0, x_k)\}$, osserviamo che $r > 0$ e consideriamo l'intorno $B_r(x_0)$ di x_0. Evidentemente, $B_r(x_0) \cap Y - \{x_0\} = \emptyset$, quindi x_0 non è un punto di accumulazione per Y. Assurdo. ◊

Osservazione 3.1.7 Dal teorema 3.1.8 segue che qualsiasi insieme costituito da un numero finito di punti è privo di punti di accumulazione. ◊

Teorema 3.1.10 *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$. Le proposizioni seguenti sono equivalenti*