

TEORIA DELLE STRUTTURE *

1. Il modello matematico.

Chiamiamo *struttura monodimensionale* (o *sistema di travi*) un sistema di corpi monodimensionali ¹ tale da costituire una struttura piana, se i corpi del sistema sono delle travi ad asse rettilineo caricate da forze concentrate e/o distribuite e/o da coppie concentrate. Le travi inflesse sono quindi particolari strutture monodimensionali.

Il modello matematico delle travi inflesse fornisce, per immediata estensione alle strutture monodimensionali, un modello matematico monodimensionale per le strutture monodimensionali. A differenza del caso delle travi inflesse, per le strutture monodimensionali la determinazione della configurazione deformata per integrazione analitica è talmente onerosa in termini di tempo da escluderne l'impiego nella pratica, relegandone l'interesse al campo (puramente teorico) della *Teoria matematica dell'elasticità*. Perciò non ci soffermeremo nemmeno sulla (pur semplice) costruzione del modello (matematico) delle strutture monodimensionali, limitandoci a darne il conseguente

[PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI] *Se una struttura monodimensionale è sottoposta a un carico p_1 (problema {1}) e poi a un carico p_2 (problema {2}) e si amplifica secondo il coefficiente c_1 il carico p_1 e secondo il coefficiente c_2 il carico p_2 , allora tutto ciò che accade nello schema sottoposto al carico $p_3 = c_1 p_1 + c_2 p_2$ (problema {3}) è (punto per punto) dato da c_1 volte ciò che accade nel problema {1} più c_2 volte ciò che accade nel problema {2} (fig. 1). Precisamente, con le usuali notazioni, distinguendo con l'indice i le grandezze relative al problema { i } e detto z l'asse del generico tronco di struttura*

$$\begin{aligned}v_3(z) &= c_1 v_1(z) + c_2 v_2(z) \\ \varphi_3(z) &= c_1 \varphi_1(z) + c_2 \varphi_2(z) \\ M_3(z) &= c_1 M_1(z) + c_2 M_2(z) \\ T_3(z) &= c_1 T_1(z) + c_2 T_2(z) \\ N_3(z) &= c_1 N_1(z) + c_2 N_2(z) \\ \sigma_{z3}(P) &= c_1 \sigma_{z1}(P) + c_2 \sigma_{z2}(P) \\ \tau_{z3}(P) &= c_1 \tau_{z1}(P) + c_2 \tau_{z2}(P).\end{aligned}$$

* A. Maceri, *Teoria delle strutture*, e-ISBN 978-88-85929-49-4, © Accademica 1999

¹ Aveni, cioè, una dimensione predominante sulle altre due.

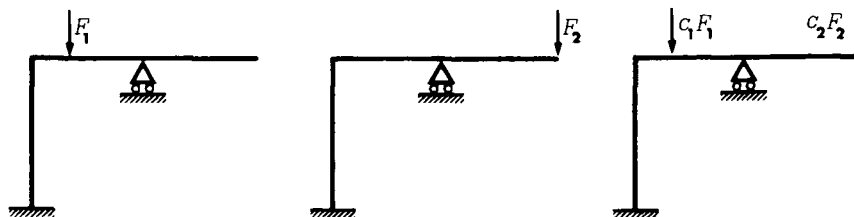


Fig. 1

Passiamo quindi subito ad indicare alcuni dei più significativi metodi di soluzione per le strutture monodimensionali. Alcuni di essi fanno ricorso a una forma più elaborata del principio di sezionamento, che si ottiene aggiungendo all'enunciato impiegato finora il seguente

[SECONDO PRINCIPIO DI SEZIONAMENTO] *Sia S una struttura monodimensionale. Se si asportano parti di struttura (ad esempio operando dei tagli) e/o degradano dei vincoli (ad esempio sostituendo un carrello a un incastro) si ha quanto segue. Conservando sulla parte rimasta il carico che effettivamente vi insisteva e applicando (come carichi) nelle sezioni in cui si sono operati dei tagli le azioni che le parti asportate esercitavano su quella rimasta e applicando (qualora si siano degradati dei vincoli) come carichi le azioni che i vecchi vincoli potevano esercitare ed i nuovi vincoli non possono esplicare, si ottiene un nuovo problema (diversa è infatti la struttura e diversa è la condizione di carico). Se il problema così ottenuto ha zero gradi di libertà, allora esso ed il problema dato hanno per le parti comuni, (trave per trave) eguale linea elastica. Conseguentemente i due problemi hanno eguali le rotazioni ($\varphi = dv/dz$), i momenti flettenti ($M = -EI d^2v/dz^2$), i tagli ($T = dM/dz$), gli sforzi normali, le $\sigma_z (= M y/I)$, le $\tau_z (= TS/Ic)$, le ϵ_z . Per esprimere tale fatto si dice che i due schemi sono equivalenti. Qualora un tronco del nuovo problema risulti labile, la sua configurazione deformata è determinata a meno di uno spostamento rigido, nel senso che la sua linea elastica si ottiene sommando a quella del problema assegnato un polinomio al più di primo grado (il che corrisponde a sommare una rotazione rigida e/o una traslazione rigida del tronco). Conseguentemente su tale tronco sono diverse le rotazioni $\varphi (= dv/dz)$ ma non $M, T, N, \sigma_z, \tau_z, \epsilon_z$.*

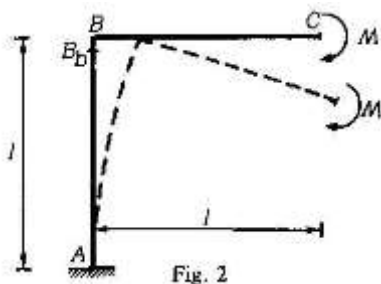


Fig. 2

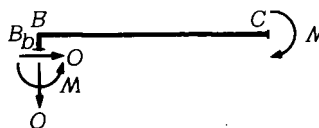


Fig. 3

PROBLEMA 1. *Determinare lo spostamento orizzontale del nodo B della struttura di fig. 2.*



Fig. 4

Applichiamo il secondo principio di sezionamento, operando in B_b un taglio. Per il primo principio di sezionamento sforzo normale, taglio e momento flettente nella sezione B_b della struttura di fig. 2 sono quelli dati in fig. 3. Pertanto, per il secondo principio di sezionamento, la struttura di fig. 2 equivale a quella di fig. 4. Poiché il tronco di fig. 4 non è labile, si ha (problema 5 del cap. 17)

$$v(B) = v(B_b) = \frac{Ml^2}{2EI}.$$

2. I cedimenti vincolari.

Finora si è ammesso che il terreno (o più in generale la fondazione) su cui è costruita la struttura si comporti come un corpo rigido. Questa schematizzazione è, in alcuni casi, inammissibile. Per le esigenze della pratica costruttiva è possibile, in tali casi particolari, fare ricorso a dei modelli molto semplici del comportamento del materiale di fondazione. Qui prendiamo in considerazione soltanto i cedimenti del carrello, dell'appoggio, dell'incastro. I modelli che adottiamo per descrivere i cedimenti di tali vincoli (esterni) sono quello di *cedimento impresso* (o *anelastico*) e quello di *cedimento elastico*.

Sia S la sezione (della struttura) vincolata. Nel primo caso (cedimento impresso), se in A c'è un carrello o una cerniera (esterna) è assegnato come dato del problema uno spostamento del vincolo (in intensità, direzione (normale al binario di scorrimento nel caso di carrello), verso); se in A c'è un incastro è assegnato come dato del problema uno spostamento del vincolo (in intensità, direzione, verso) e/o una rotazione della sezione A (in intensità e verso, nel qual caso si parla di *cedimento angolare impresso*). Nel secondo caso (cedimento elastico), se in A c'è un carrello o una cerniera (esterna) sono assegnati come dati del problema un numero positivo k espresso in cm/Kg (che chiamiamo *costante del cedimento elastico*) e una direzione r (normale al binario di scorrimento se il vincolo è un carrello). Il modello che si assume è ²

$$(1) \quad \delta = kR$$

dove δ è lo spostamento di A (lungo r) ed R è la reazione del vincolo ³. Ancora nel secondo caso (cedimento elastico) se in A c'è un incastro sono assegnati come dati del problema la costante k e la direzione r (del cedimento), assumendo ancora come modello ² la (1), e/o un numero positivo k_1 espresso in $kg^{-1}cm^{-1}$ (detto *costante del cedimento angolare elastico*).

¹ Pertanto il cedimento elastico è noto a priori solo in direzione. Il verso del cedimento avviene evidentemente, essendo il materiale di fondazione per ipotesi deformabile, nel verso della componente su r dell'azione della struttura sulla fondazione (ovvero, il che è lo stesso, sul vincolo cedevole).

² Se la fondazione è il terreno, la costante k ha un ampio campo di variabilità (cap. 10) e (perciò) va misurata in situ.

³ Se la fondazione è il terreno, tale schema è chiaramente scorretto. Infatti è ovvio che il terreno secondo tale modello si comporta proprio come una molla ancorata in A alla struttura, sicché si contrae (elasticamente) se la struttura preme sul terreno (ciò che è vero) e si estende (elasticamente) se la struttura tira il terreno (ciò che è falso). Tuttavia non esistono modelli che siano di pratico impiego e più soddisfacenti sotto questo aspetto.

Il modello che si assume per simulare il cedimento angolare elastico è

$$\varphi = k_1 M$$

dove φ è l'angolo di cui ruota la sezione di incastro A ed M è il momento di incastro ⁴.

In *Teoria matematica dell'elasticità* si estende (facilmente) il principio di sovrapposizione degli effetti alle strutture monodimensionali a vincoli rigidi e/o elastici sottoposte a carichi e/o a cedimenti impressi. Precisamente

[PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI] *Se una struttura monodimensionale a vincoli rigidi e/o elastici è sottoposta a una condizione di carico costituita da carichi p_1 e/o cedimenti impressi δ_1 (problema {1}) e poi a una condizione di carico costituita da carichi p_2 e/o cedimenti impressi δ_2 (problema {2}), allora tutto ciò che accade nella struttura (in esame) sottoposta alla condizione di carico costituita dai carichi $c_1 p_1 + c_2 p_2$ e/o dai cedimenti impressi $c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2$ (ottenuta amplificando secondo il coefficiente c_1 la condizione di carico del problema {1} e secondo il coefficiente c_2 la condizione di carico del problema {2}) è (punto per punto e/o sezione per sezione) dato da c_1 volte ciò che accade nel problema {1} più c_2 volte ciò che accade nel problema {2}.*

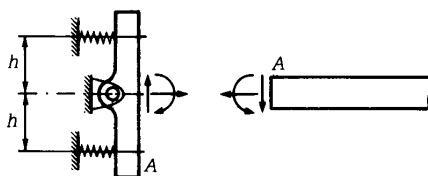


Fig. 5

Il secondo principio di sezionamento sussiste anche per le strutture monodimensionali a vincoli rigidi e/o cedevoli elasticamente, sottoposte a carichi e/o cedimenti impressi. Qualora la struttura equivalente (ottenuta nell'applicare il secondo principio di sezionamento) sia labile, è possibile e utile eliminare l'indeterminazione su spostamenti e rotazioni (dei tronchi labili) con la

[1] *Sia assegnato un problema ~ costituito da una struttura con vincoli rigidi e/o cedevoli elasticamente, sottoposta a carichi e/o cedimenti impressi e se ne denoti con v_1 la linea elastica (tronco per tronco). Si consideri un problema {2} equivalente al problema {1} nel senso del secondo principio di sezionamento e si supponga che la struttura del*

⁴ Il verso del cedimento angolare elastico coincide evidentemente, essendo il dispositivo vincolare per ipotesi cedevole angolarmente, col verso che ha il momento che la struttura scarica sull'incastro (fig. 5).

problema {2} sia labile. Si consideri un problema {3} in cui la struttura è ottenuta da quella del problema {2} aggiungendo degli appoggi rigidi in corrispondenza di alcune cerniere e/o irrigidendo alcuni vincoli cedevoli elasticamente. Il carico nel problema {3} coincide con quello nel problema {2}, con esclusione però dei cedimenti impressi. Si consideri il problema {4} in cui la struttura è uguale a quella del problema {3} e il carico è costituito dai cedimenti impressi presenti nel problema {2} e da cedimenti che vengono impressi alle cerniere che sono state appoggiate rigidamente (a terra) e/o ai vincoli cedevoli elasticamente che sono stati irrigiditi e che sono uguali agli spostamenti (effettivi) che i centri di tali cerniere e tali vincoli cedevoli subiscono nel problema {1}. Si denoti con v_3 [risp. v_4] la linea elastica nel problema {3} [risp. {4}] (tronco per tronco). Se la struttura del problema {3} ha zero gradi di libertà, la funzione $v_3 + v_4$ è la (unica) soluzione del problema {1}. Pertanto (risultando

$$\frac{dv_1}{dz} = \frac{d(v_3 + v_4)}{dz} = \frac{dv_3}{dz} + \frac{dv_4}{dz} \quad , \quad \frac{d^2v_1}{dz^2} = \frac{d^2v_3}{dz^2} + \frac{d^2v_4}{dz^2}$$

nonché $\varphi = \frac{dv}{dz}$, $M = -EI \frac{d^2v}{dz^2}$, $T = \frac{dM}{dz}$, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_3 + \varphi_4 \\ M_1 &= M_3 + M_4 \\ T_1 &= T_3 + T_4 \\ N_1 &= N_3 + N_4 \\ \sigma_{z1}(P) &= \sigma_{z3}(P) + \sigma_{z4}(P) \\ \tau_{z1}(P) &= \tau_{z3}(P) + \tau_{z4}(P) \\ \varepsilon_{z1}(P) &= \varepsilon_{z3}(P) + \varepsilon_{z4}(P) \quad . \end{aligned}$$

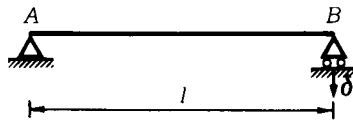


Fig. 6

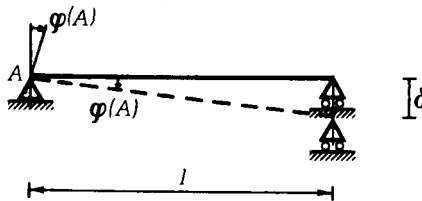


Fig. 7

PROBLEMA 2. Determinare la rotazione della sezione appoggiata di sinistra della trave di fig. 6.

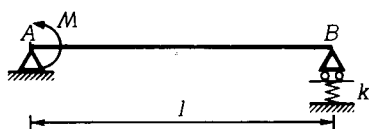


Fig. 8

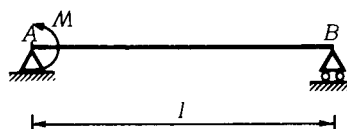


Fig. 9

La struttura è isostatica. Dalla *Statica* segue che i vincoli non reagiscono. Quindi $M = 0$ identicamente. Pertanto (osservazione 3 del cap. 17) la trave resta rettilinea (fig. 7). Quindi, confondendo al solito gli angoli con le tangenti,

$$\varphi(A) = l .$$

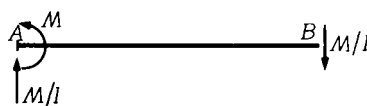


Fig. 10

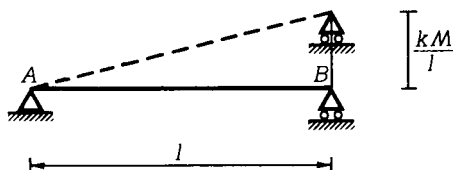


Fig. 11

PROBLEMA 3. Determinare la rotazione della sezione appoggiata di sinistra della trave di fig. 8.

La struttura è isostatica. Consideriamo lo schema di fig. 9 (in cui il carrello B è rigido). Osserviamo che in fig. 8 le reazioni (dei vincoli sulla struttura) sono quelle di fig. 10. Quindi in fig. 8 il punto B si innalza di

$$k = \frac{\mathcal{M}}{l} .$$

Consideriamo lo schema di fig. 11 (in cui la trave resta rettilinea). Detta $\varphi(A)$ la rotazione della sezione appoggiata di sinistra di fig. 8 e supposto che sia antioraria, per la [1] $\varphi(A)$ è somma della rotazione della sezione appoggiata di

sinistra di fig. 9, che è antioraria e data dalla (12) del cap. 17, e della rotazione della sezione appoggiata di sinistra di fig. 11, che è antioraria e pari a

$$\frac{kR}{l} = \frac{k\mathcal{M}}{l^2} .$$

Pertanto

$$\varphi(A) = \frac{\mathcal{M}l}{3EI} + \frac{k\mathcal{M}}{l^2} .$$

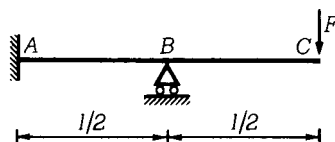


Fig. 12

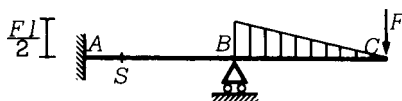


Fig. 13

OSSERVAZIONE 1. Dalla [1] segue che i cedimenti vincolari anelastici e/o elastici in strutture isostatiche fanno variare (rispetto al problema con vincoli rigidi) al più spostamenti e rotazioni (ma non reazioni e caratteristiche M, T, N).

3. Soluzione di strutture iperstatiche con le equazioni di congruenza.

3.1. Generalità.

Consideriamo la struttura di fig. 12. Si tratta evidentemente di una struttura iperstatica. Precisamente

$$l = 0, \quad i = 1 .$$

Per proporzionare (o verificare la sicurezza) di una struttura costituita da un sistema di travi inflesse occorre in primo luogo il diagramma del momento flettente. Evidentemente il diagramma di M nel tratto BC è noto. Sia ora S una sezione arbitraria del tronco AB (fig. 13). Per calcolare $M(S)$ (come sappiamo dal principio di sezionamento) è indispensabile conoscere la reazione dell'incastro A oppure quella del carrello B . Ma, essendo lo schema iperstatico, le sole equazioni della *Statica* non bastano a determinare le reazioni vincolari. Questa difficoltà si supera portando in conto la deformabilità delle travi. Un metodo è quello delle *equazioni di congruenza*, che sono espone nei problemi che seguono.

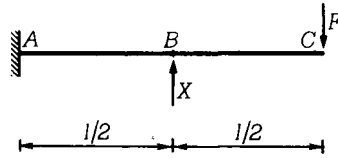


Fig. 14

PROBLEMA 4. Progettare la struttura di fig. 12 ($F = 2 t$, $l = 10 m$).

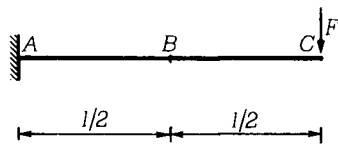


Fig. 15

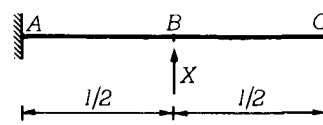


Fig. 16

Realizziamo la trave di fig. 12 in acciaio, con $\frac{\sigma_a}{s} = 1.600 \text{ Kg/cm}^2$, e a sezione costante. Impieghiamo una trave HE ad ali larghe e parallele montandola in modo che le ali siano orizzontali e il carico baricentrico, sicché l'asse y di tab. 2 del cap. 12 è l'asse di sollecitazione e (poiché il centro di taglio coincide col baricentro) non ci sono τ_z da torsione. Come sezione di primo tentativo, ne scegliamo una capace di assorbire il momento flettente $\frac{Fl}{2} = 10^6 \text{ kg cm}$ presente in corrispondenza dell'appoggio B (fig. 13). E' immediato verificare che la sezione HE 240 A, che ha un W_x di 675 cm^3 , è siffatta.

Denotiamo dunque con I il momento di inerzia di tale sezione rispetto all'orizzontale baricentrica e con E il modulo di Young dell'acciaio. Consideriamo il problema ausiliario di fig. 14, dove denotiamo con A l'azione che il carrello B esercita sulla trave nello schema di fig. 12. Per il secondo principio di sezionamento i problemi di figg. 12 e 14 sono equivalenti. Quindi la sezione B di fig. 14 subisce uno spostamento verticale $v(B)$ pari a quello che si verifica nel problema di fig. 12. Ma nel problema di fig. 12 il carrello B consente alla sezione B soltanto spostamenti orizzontali. Quindi

$$v(B) = 0.$$

Questa equazione, che viene chiamata di congruenza perché esprime il fatto che devono essere rispettate le condizioni di vincolo, determina il valore di X . Infatti per il principio di sovrapposizione degli effetti $v(B)$ (fig. 14) è pari alla somma dell'abbassamento di B di fig. 15 e dell'abbassamento di B di fig. 16. Nel problema 8 del cap. 17 abbiamo visto che la sezione B in fig. 15 si abbassa di $\frac{5Fl^3}{48EI}$. Inoltre è evidente che lo schema di fig. 16 è equivalente a quello di fig. 17. Perciò la sezione B di fig. 16 (problema 1 del cap. 17) si abbassa di $-\frac{X(\frac{l}{2})^3}{3EI} = -\frac{Xl^3}{24EI}$. Perciò l'equazione di congruenza si scrive

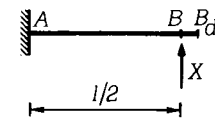


Fig. 17

$$\frac{5Fl^3}{48EI} - \frac{Xl^3}{24EI} = 0.$$

Ne segue

$$X = 2,5 F .$$

Conseguentemente realizzando la trave con la sezione *HE 240 A* il momento flettente massimo si verifica nella sezione appoggiata *B* e risulta pari a 10^6 Kgcm ; il taglio massimo si verifica nella sezione a sinistra di *B* ed ha intensità $3 \cdot 10^3 \text{ Kg}$. Così la sezione più sollecitata è quella, B_s , immediatamente a sinistra dell'appoggio *B*, e va verificata la sicurezza dei suoi punti. Nella pratica ci si limita ad eseguire tale verifica nei punti in cui lo stato tensionale appare più gravoso. In ogni punto di B_s lo stato tensionale è costituito (se z è l'asse della trave) da $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$; dalle σ_z , che hanno (momento risultante rispetto all'asse neutro pari a 10^6 Kgcm e) il diagramma di fig. 39 del cap. 12; dalle τ_z , che hanno (risultante verticale e baricentrica pari a $3 \cdot 10^3 \text{ Kg}$ e) il diagramma di fig. 108 del cap. 14. Così i punti in cui eseguire la verifica (essendo nelle strutture monodimensionali più preoccupante la sollecitazione da flessione) sono il punto *H*, in cui la σ_z è massima e $\tau_z = \tau_{zx}$ è massima (sull'ala); il punto *K*, in cui la σ_z e la $\tau_z = \tau_{zy}$ sono prossime ai loro valori massimi; il punto *G* in cui la $\tau_z = \tau_{zy}$ è massima (fig. 108 del cap. 14). La verifica di sicurezza si esaurisce così scegliendo un criterio di resistenza e procedendo come nel problema 1 del cap. 9. Qualora la verifica non risulti soddisfatta, in questo particolare problema è sufficiente scegliere una sezione più grande, tanto quanto basta perché le verifiche precedenti risultino soddisfatte (osservazione 2).

OSSERVAZIONE 2. Le reazioni vincolari di fig. 12 sono indipendenti dal materiale di cui è fatta la trave e dalla forma della sezione retta. Come sarà dimostrato dai risultati di altri esempi, ciò non è sempre vero nelle strutture iperstatiche.

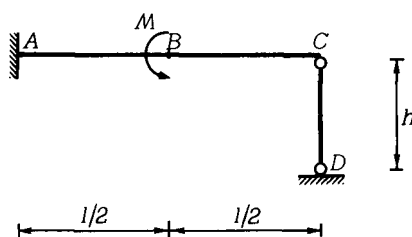


Fig. 18

PROBLEMA 5. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 18.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 18. Si tratta di uno schema una volta iperstatico

$$l = 0, \quad i = 1 .$$

Assumiamo come sistema equivalente quello di figg. 19 e 20, in cui abbiamo supposto che il pendolo CD è un puntone (si è supposto quindi che esso è compresso e si accorcia). Per il secondo principio di sezionamento l'abbassamento che C ha in fig. 18 è eguale a quello $v(C)$ che C ha nello schema di fig. 19; inoltre l'abbassamento che C ha in fig. 18 è

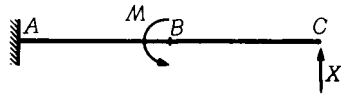


Fig. 19

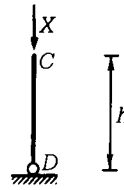


Fig. 20

eguale a quello che C ha nello schema di fig. 20. Quindi l'equazione (di congruenza) risolvente si ottiene esprimendo il fatto che l'abbassamento di C in fig. 19 è eguale all'abbassamento di C in fig. 20. Nel problema dello sforzo normale baricentrico (di *Saint Venant*) abbiamo provato che la trave CD si accorcia a causa della forza di compressione X e, dette h' la sua lunghezza a fine deformazione ed A l'area della sezione retta, risulta

$$h - h' = \frac{Xh}{EA}.$$

Pertanto in fig. 20 C si abbassa di $\frac{Xh}{EA}$ e l'equazione di congruenza si scrive

$$v(C) = \frac{Xh}{EA}.$$

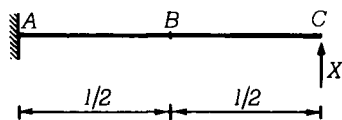


Fig. 21

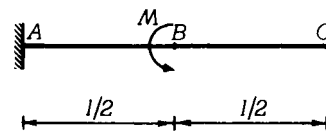


Fig. 22

Procedendo col principio di sovrapposizione degli effetti, si ha che $v(C)$ è somma degli abbassamenti di C negli schemi di figg. 21 e 22. Per quanto riguarda l'abbassamento di C in fig. 21, è ovvio (problema 1 del cap. 17) che esso è pari a

$$-\frac{X l^3}{3 EI}.$$

Circa il problema di fig. 22, consideriamo lo schema ausiliario nel senso dell'analogia di *Mohr* (fig. 23) e le relative reazioni (fig. 24). Se ne trae che la sezione C di fig. 22 si abbassa di

$$-\frac{Ml}{2EI} \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} \right) = -\frac{3Ml^2}{8 EI}.$$

L'equazione di congruenza è perciò

$$-\frac{X l^3}{3 EI} - \frac{3Ml^2}{8 EI} = \frac{Xh}{EA}.$$

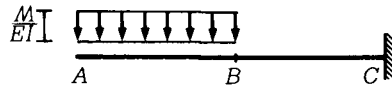


Fig. 23

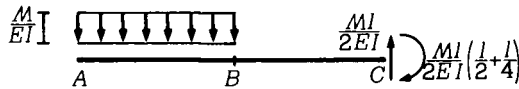


Fig. 24

Se ne trae

$$X = -\frac{9 M l^2 A}{24 l h + 8 A l^3}.$$

Conseguentemente il pendolo non è un puntone ma un tirante (ciò che era fisicamente evidente in fig. 18). A questo punto è facile tracciare i diagrammi M, T, N e, con essi, verificare la sicurezza della struttura.

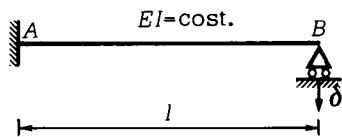


Fig. 25

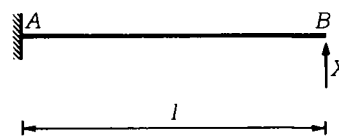


Fig. 26

PROBLEMA 6. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 25.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 25. La struttura è una volta iperstatica (il computo si esegue prescindendo dal cedimento dei vincoli). Lo schema di fig. 26 è, per il secondo principio di sezionamento, equivalente a quello di fig. 25. Quindi in fig. 26 il punto B si deve abbassare di δ (che è un dato del problema). Quindi

$$v(B) = \delta.$$

Quindi (problema 1 del cap. 17)

$$-\frac{X l^3}{3 E I} = \delta.$$

Quindi

$$X = -\frac{3 \delta EI}{l^3}$$

sicché il vincolo tira in basso la trave (ciò era del resto ovvio a priori).

È facile ora tracciare i diagrammi M, T, N e, con essi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 25.

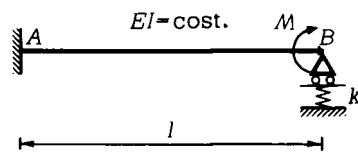


Fig. 27

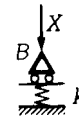


Fig. 29

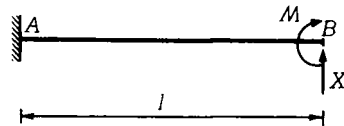


Fig. 28

PROBLEMA 7. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 27.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 27. La struttura è una volta iperstatica (il computo si esegue prescindendo dal cedimento dei vincoli). Gli schemi di figg. 28 e 29 sono, per il secondo principio di sezionamento, equivalenti a quelli di fig. 27 (per le parti comuni). Quindi l'abbassamento $v(B)$ di B in fig. 28 è eguale a quello di B in fig. 27 e l'abbassamento di B in fig. 29 (che è pari a $+kX$), è eguale a quello di B in fig. 27. Pertanto l'equazione (di congruenza) risolvibile è

$$v(B) = kX.$$

Consideriamo i problemi di figg. 30 e 31. Per il principio di sovrapposizione degli effetti e ricordando i risultati dei problemi 5 e 1 del cap. 17 si ha

$$v(B) = \frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Xl^3}{3EI}.$$

Conseguentemente

$$\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = kX$$

e di qui si ricava il valore di X . È facile ora tracciare i diagrammi M, T, N e, con essi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 27.

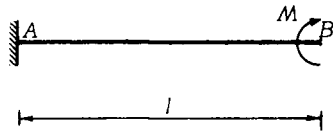


Fig. 30

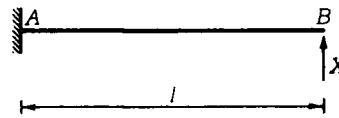


Fig. 31

PROBLEMA 8. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 32. L'incastro cede angularmente anelasticamente di $\bar{\varphi}$ (radianti) in verso orario (fig. 32).

Determiniamo anzitutto le caratteristiche della sollecitazione della struttura, già realizzata, di fig. 32. La struttura è una volta iperstatica. Lo schema di fig. 32 è, per il secondo principio di sezionamento, equivalente a quello di fig. 33. Pertanto la sezione A_2 ruota in fig. 33 di un angolo $\varphi(A_2)$ che deve essere eguale a quello di cui ruota la sezione $A_1 (= A)$ in fig. 32. Ne segue, assumendo positive le rotazioni orarie

$$\varphi(A_2) = \bar{\varphi}.$$

Evidentemente per la (12) del cap. 17

$$\varphi(A_2) = -\frac{Xl}{3EI}.$$

Se ne trae

$$-\frac{Xl}{3EI} = \bar{\varphi}$$

e di qui

$$X = -\frac{3EI\bar{\varphi}}{l}.$$

È facile ora tracciare i diagrammi del momento flettente e del taglio della struttura di fig. 32 e, con essi, verificare la sicurezza.

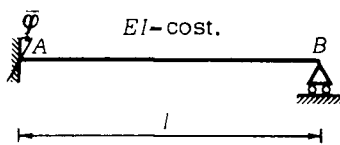


Fig. 32

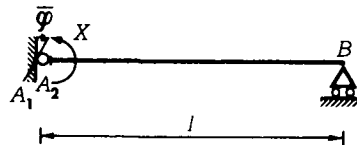


Fig. 33

PROBLEMA 9. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 34. L'incastro cede angularmente elasticamente e ha costante k .

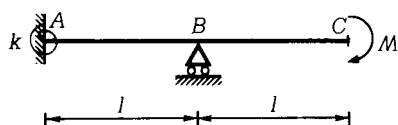


Fig. 34

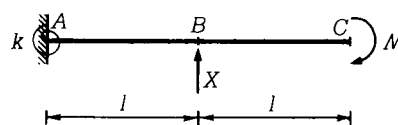


Fig. 35

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T della struttura, già realizzata, di fig. 34. La struttura è una volta iperstatica. Lo schema di fig. 35 è, per il secondo principio di sezionamento, equivalente a quello di fig. 34. Quindi l'abbassamento di B in fig. 35 deve essere eguale all'abbassamento di B in fig. 34. Detto $v(B)$ l'abbassamento di B in fig. 35 e osservato che in fig. 34 in B c'è un carrello con binario di scorrimento orizzontale, se ne trae l'equazione (di congruenza) risolvibile

$$v(B) = 0.$$

Per la [1] $v(B)$ è somma dell'abbassamento $v_2(B)$ della sezione B di fig. 36 e dell'abbassamento $v_3(B)$ della sezione B di fig. 37, in cui $\bar{\varphi}$ è l'angolo effettivo di cui ruota in fig. 37 la sezione A . Pertanto l'equazione risolvibile è

$$v_2(B) + v_3(B) = 0.$$

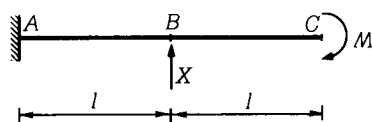


Fig. 36

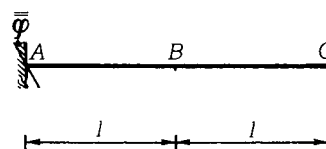


Fig. 37

Per il principio di sovrapposizione degli effetti $v_2(B)$ è somma dell'abbassamento $v_4(B)$ in fig. 38 e dell'abbassamento $v_5(B)$ di B in fig. 39. Pertanto l'equazione risolvibile è

$$v_4(B) + v_5(B) + v_3(B) = 0.$$

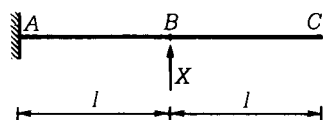


Fig. 38

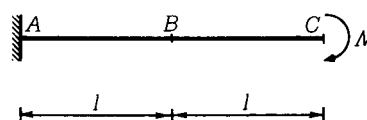


Fig. 39

Calcoliamo $v_4(B)$. Tranciamo in B_d . Per il primo e secondo principio di sezionamento e per il principio di azione e reazione lo schema di fig. 40 equivale a quello di fig. 38 (per i punti comuni). Pertanto (problema 1 del cap. 17)

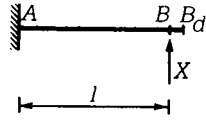


Fig. 40

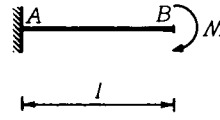


Fig. 41

$$v_4(B) = -\frac{Xl^3}{3EI}$$

Allo stesso modo, lo schema di fig. 41 equivale a quello di fig. 39 (per i punti comuni). Pertanto (problema 5 del cap. 17)

$$v_5(B) = \frac{Ml^2}{2EI}$$

L'equazione risolvente si scrive pertanto

$$-\frac{Xl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + v_3(B) = 0$$

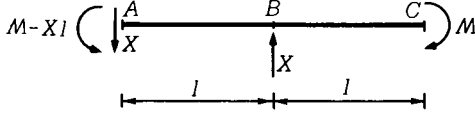


Fig. 42

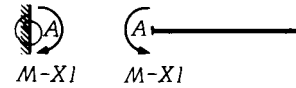


Fig. 43

Calcoliamo $v_3(B)$. Applichiamo il primo principio di sezionamento allo schema di fig. 35 (fig. 42). Si ha che il momento di incastro è antiorario ed ha intensità $M - Xl$. Quindi per il principio di azione e reazione la sezione di incastro A di fig. 35 (e quindi di fig. 34) ruota in verso orario di un angolo pari a $k(M - Xl)$ (fig. 43). Pertanto la linea elastica dello schema di fig. 37 è quella di fig. 44 (la trave resta ad asse rettilineo perché (osservazione 3 del cap. 17) su essa $M = 0$ identicamente). Conseguentemente (per l'ipotesi di piccole deformazioni $\varphi \cong \text{tg } \varphi$), $v_3(B) = lk(M - Xl)$ col segno più perché è un abbassamento. L'equazione risolvente è pertanto

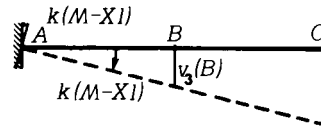


Fig. 44

$$-\frac{Xl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} + lk(M - Xl) = 0$$

e di qui si ricava immediatamente il valore di X . Noto X si tracciano subito i diagrammi M, T , si verifica la sicurezza e, se lo si desidera, si determina la linea elastica dello schema assegnato.

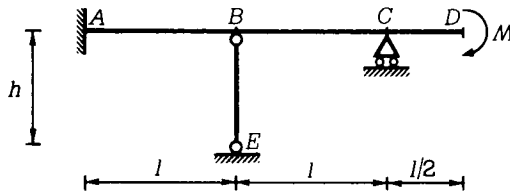


Fig. 45

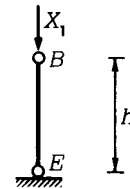


Fig. 47

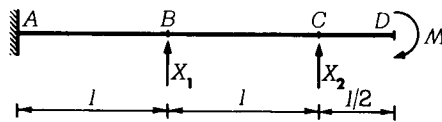


Fig. 46

PROBLEMA 10. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 45.

Determiniamo anzitutto i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura, già realizzata, di fig. 45. Si tratta di una trave continua due volte iperstatica. Risolviamola con la congruenza. Scegliamo i sistemi equivalenti di figg. 46 e 47. Prendendo positivi gli abbassamenti e denotando con v quelli del problema di fig. 46, il secondo principio di sezionamento fornisce il sistema risolvente

$$v(B) = \frac{X_1 h}{EA}$$

$$v(C) = 0 .$$

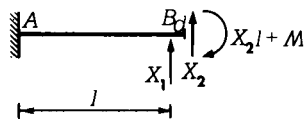


Fig. 48

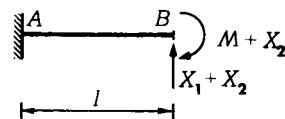


Fig. 49

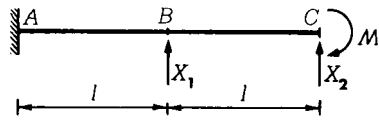


Fig. 50

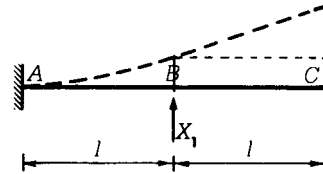


Fig. 51

Il sistema di fig. 46 equivale al problema di fig. 48, che ridisegniamo in fig. 49. Pertanto

$$v(B) = -\frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} + \frac{(\mathcal{M} - X_2l)^2}{2EI} .$$

Inoltre il sistema di fig. 46 equivale al problema di fig. 50. Osserviamo che nello schema di fig. 51 la sezione C si abbassa di

$$-\frac{X_1l^3}{3EI} - \frac{X_1l^2}{2EI} l .$$

Pertanto in fig. 50 la sezione C si abbassa di

$$\frac{\mathcal{M}(2l)^2}{2EI} - \frac{X_2(2l)^3}{3EI} - \frac{X_1l^3}{3EI} - \frac{X_1l^3}{2EI} .$$

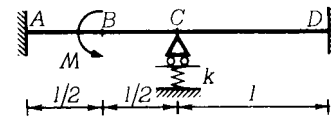


Fig. 52

Il sistema risolvete è perciò

$$-\frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} + \frac{(\mathcal{M} - X_2l)^2}{2EI} = \frac{X_1h}{EA}$$

$$\frac{\mathcal{M}(2l)^2}{2EI} - \frac{X_2(2l)^3}{3EI} - \frac{X_1l^3}{3EI} - \frac{X_1l^3}{2EI} = 0 .$$

È facile ora tracciare i diagrammi M,T,N per la struttura di fig. 45 e, con essi, verificare la sicurezza.

Problema 11. *Verificare la sicurezza della struttura di fig. 52.*

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T della struttura, già realizzata, di fig. 52. Si tratta di una struttura quattro volte iperstatica. Però, trattandosi di una trave inflessa, una spinta orizzontale di incastro è disaccoppiata dalle altre incognite iperstatiche (nel senso che è possibile scrivere un sistema risolvete di tre equazioni nelle rimanenti tre incognite iperstatiche). Scegliamo come sistema equivalente quello della fig. 53. Assumiamo positivi gli abbassamenti e positive le rotazioni orarie e denotiamo con v e φ gli abbassamenti e le rotazioni in fig. 53. Per il secondo principio di sezionamento deve essere

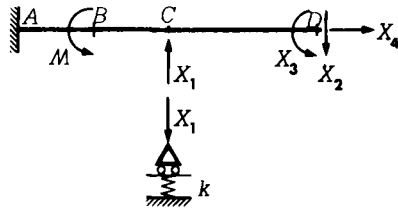


Fig. 53

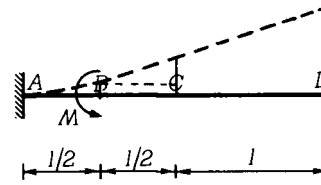


Fig. 54

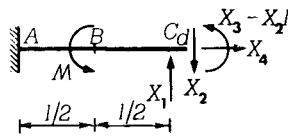


Fig. 55

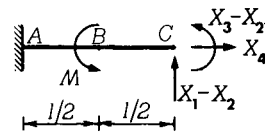


Fig. 56

$$\begin{aligned} v(C) &= kX_1 \\ v(D) &= 0 \\ \varphi(D) &= 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo $v(C)$. Nello schema di fig. 54 l'abbassamento di C è ovviamente

$$-\frac{\mathcal{M}(l/2)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}(l/2)l}{EI} \frac{1}{2}.$$

Conseguentemente, equivalendo lo schema di fig. 53 a quello di fig. 55, che ridisegniamo in fig. 56, si ha

$$v(C) = -\frac{\mathcal{M}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}\left(\frac{l}{2}\right)l}{EI} \frac{1}{2} - \frac{(X_1 - X_2)l^3}{3EI} + \frac{(X_3 - X_2)l^2}{2EI}.$$

In fig. 54 la sezione D si abbassa di

$$-\frac{\mathcal{M}(l/2)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}(l/2)}{EI} \left(\frac{l}{2} + l\right).$$

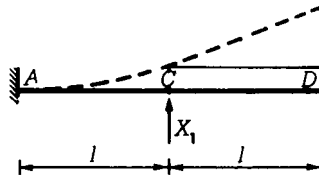


Fig. 57

In fig. 57 la sezione D si abbassa di

$$-\frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{X_1 l^2}{2EI} l.$$

Pertanto

$$v(D) = \frac{X_2 (2l)^3}{3EI} - \frac{X_3 (2l)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}(l/2)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M}(l/2)}{EI} \left(\frac{l}{2} + l \right) - \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{X_1 l^2}{2EI} l.$$

In fig. 54 la sezione D ruota di

$$-\frac{\mathcal{M}(l/2)}{EI}$$

e in fig. 57 la sezione D ruota di

$$-\frac{X_1 l^2}{2EI}.$$

Pertanto risulta

$$\varphi(D) = \frac{X_2 (2l)^2}{2EI} - \frac{X_3 (2l)}{EI} - \frac{\mathcal{M}(l/2)}{EI} - \frac{X_1 l^2}{2EI}.$$

Così, il sistema risolvibile è

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{M} \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M} \left(\frac{l}{2} \right) l}{EI} - \frac{(X_1 - X_2) l^3}{3EI} + \frac{(X_3 - X_2 l) l^2}{2EI} &= kX_1 \\ \frac{X_2 (2l)^3}{3EI} - \frac{X_3 (2l)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M} \left(\frac{l}{2} \right)^2}{2EI} - \frac{\mathcal{M} \left(\frac{l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} + l \right)}{EI} - \frac{X_1 l^3}{3EI} - \frac{X_1 l^2}{2EI} l &= 0 \\ \frac{X_2 (2l)^2}{2EI} - \frac{X_3 (2l)}{EI} - \frac{\mathcal{M} \left(\frac{l}{2} \right)}{EI} - \frac{X_1 l^2}{2EI} &= 0. \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite X_1, X_2, X_3 . È facile verificare che il determinante della sua matrice dei coefficienti è diverso da zero. Pertanto esso ammette una e una sola soluzione. Ne segue che X_4 è disaccoppiata da X_1, X_2, X_3 . Per determinare la quarta incognita iperstatica X_4 , osserviamo che in fig. 53 lo spostamento orizzontale di D deve essere (per il secondo principio di sezionamento) pari a zero. Quindi

$$\frac{X_4 \cdot 2l}{EA} = 0$$

e di qui $X_4 = 0$. È facile ora tracciare i diagrammi M, T per la struttura di fig. 52 e, con essi, verificare la sicurezza.

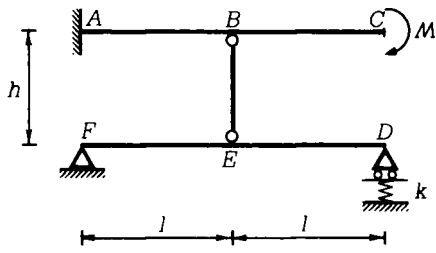


Fig. 58

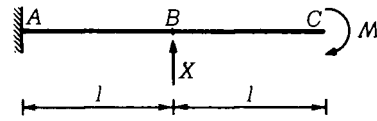


Fig. 59

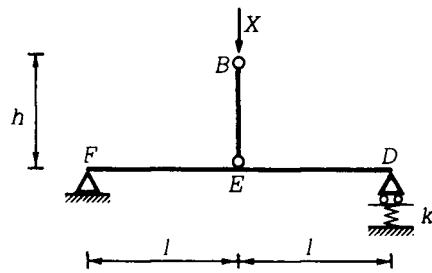


Fig. 60

PROBLEMA 12. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 58.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 58. Si tratta di un problema una volta iperstatico. Assumiamo come sistemi equivalenti quelli di figg. 59 e 60. Assumiamo positivi gli abbassamenti e denotiamo con v_1 gli abbassamenti in fig. 59 e con v_2 quelli in fig. 60. Per il secondo principio di sezionamento deve essere

$$(2) \quad v_1(B) = v_2(B) .$$

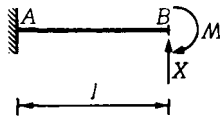


Fig. 61

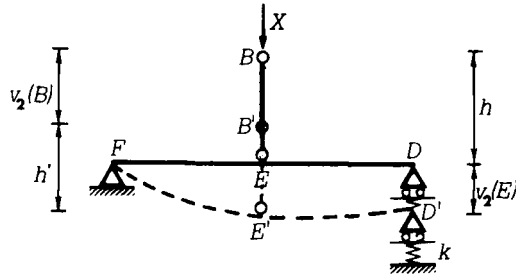


Fig. 62

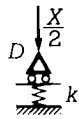


Fig. 64

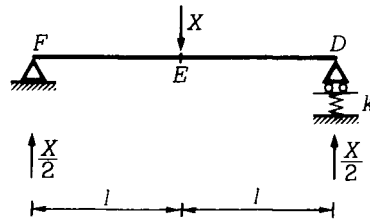


Fig. 63

Il sistema di fig. 59 equivale a quello di fig. 61. Quindi

$$(3) \quad v_1(B) = -\frac{Xl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} .$$

Quanto a $v_2(B)$, è ovvio (fig. 62) che

$$(4) \quad v_2(B) + h' = h + v_2(E) .$$

Calcoliamo $v_2(E)$. Poiché la struttura di fig. 60 equivale a quella di fig. 63, $v_2(E)$ si può calcolare in fig. 63. Applicando la [1] e osservando che in fig. 66 D si abbassa di $kX/2$ (fig. 64), $v_2(E)$ è somma dell'abbassamento di E in fig. 65 e dell'abbassamento di E in fig. 66. Calcoliamo l'abbassamento di E in fig. 65 con l'analogia di Mohr. Si ottiene subito (fig. 67) che esso è pari a

$$M^*(E) = \frac{Xl^2}{4EI} \frac{2}{3} l = \frac{Xl^3}{6EI} .$$

Pertanto, poiché l'abbassamento di E in fig. 66 è (per ovvi motivi di Geometria elementare)

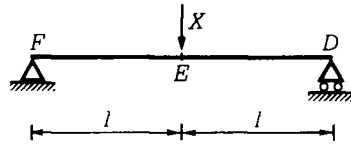


Fig. 65

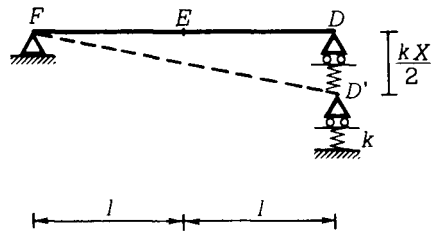


Fig. 66

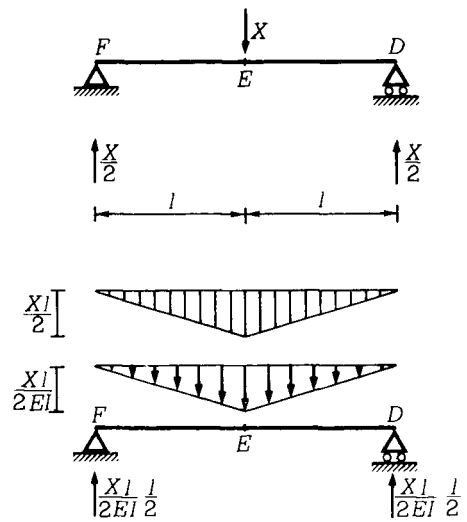


Fig. 67

$$\frac{1}{2} \frac{kX}{2}$$

otteniamo

$$v_2(E) = \frac{Xl^3}{6EI} + \frac{kX}{4} .$$

Di qui, dalla (4) e dal fatto che (fig. 62) $h - h' = \frac{Xh}{EA}$ segue

$$v_2(B) = \frac{Xh}{EA} + \frac{Xl^3}{6EI} + \frac{kX}{4} .$$

Di qui, dalla (3) e dalla (2) otteniamo l'equazione risolvente

$$-\frac{Xl^3}{3EI} + \frac{Ml^2}{2EI} = \frac{Xh}{EA} + \frac{Xl^3}{6EI} + \frac{kX}{4} .$$

È facile ora tracciare i diagrammi M, T, N e, con essi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 58.

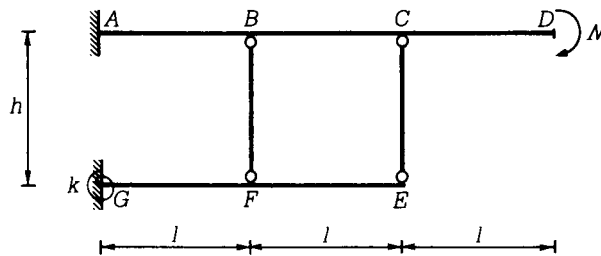


Fig. 68

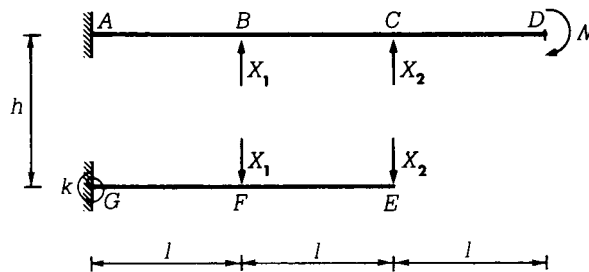
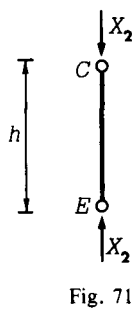
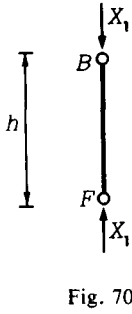


Fig. 69

PROBLEMA 13. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 68.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 68. Il problema è due volte iperstatico. Per il secondo principio di sezionamento, il problema di fig. 68 è equivalente (per i punti comuni) a quello



di fig. 69; a quello di fig. 70; a quello di fig. 71. Distinguiamo con gli indici 1, 2, 3, 4 le grandezze relative ai problemi di figg. 68, 69, 70, 71 rispettivamente. Denotiamo con P' la posizione assunta dal generico punto P della struttura dopo la deformazione. Dal secondo principio di sezionamento segue

$$\begin{aligned} dist_2(B', F') - dist_2(B, F) &= dist_1(B', F') - dist_1(B, F) \\ dist_3(B', F') - dist_3(B, F) &= dist_1(B', F') - dist_1(B, F) \\ dist_2(C', E') - dist_2(C, E) &= dist_1(C', E') - dist_1(C, E) \\ dist_4(C', E') - dist_4(C, E) &= dist_1(C', E') - dist_1(C, E) \end{aligned}$$

e di qui il sistema risolvente

$$\begin{aligned} dist_2(B', F') - dist_2(B, F) &= dist_3(B', F') - dist_3(B, F) \\ dist_2(C', E') - dist_2(C, E) &= dist_1(C', E') - dist_1(C, E) \end{aligned}$$

e di qui (5)

$$\begin{aligned} (5) \quad dist_2(B', F') - h &= -\frac{X_1 h}{EA} \\ (6) \quad dist_2(C', E') - h &= -\frac{X_2 h}{EA} \end{aligned}$$

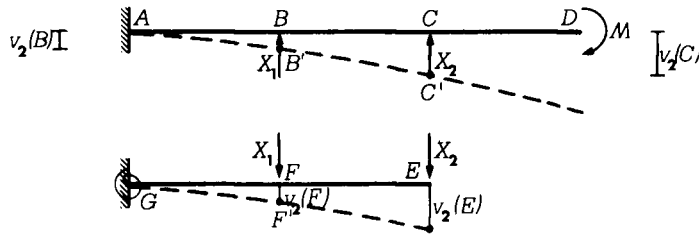


Fig. 72

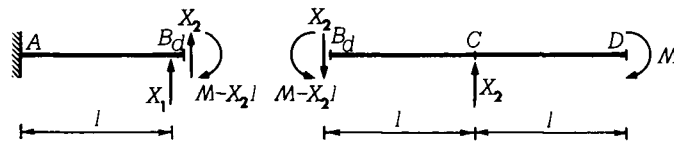


Fig. 73

Assumiamo positivi gli abbassamenti. Evidentemente (fig. 72)

$$\begin{aligned} v_2(B) + dist_2(B', F') &= h + v_2(F) \\ v_2(C) + dist_2(C', E') &= h + v_2(F) \end{aligned}$$

pertanto

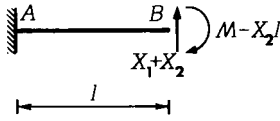


Fig. 74

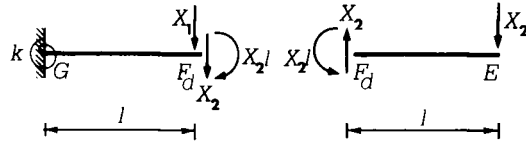


Fig. 75

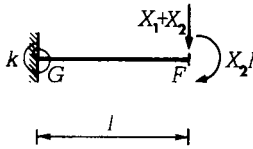


Fig. 76

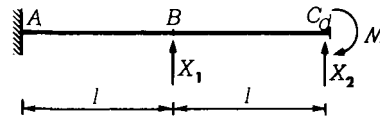


Fig. 77

$$\begin{aligned} dist_2(B', F') &= h - v_2(B) + v_2(F) \\ dist_2(C', E') &= h - v_2(C) + v_2(F) . \end{aligned}$$

Ne segue, per le (5) e (6)

$$\begin{aligned} -v_2(B) + v_2(F) &= -\frac{X_1 h}{EA} \\ -v_2(C) + v_2(F) &= -\frac{X_2 h}{EA} . \end{aligned}$$

Calcoliamo (in fig. 69) $v_2(B)$. Si ha dalla fig. 73, che ridisegniamo in fig. 74,

$$v_2(B) = -\frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} + \frac{(M - X_2l)l^2}{2EI} .$$

Calcoliamo (in fig. 69) $v_2(F)$. Si ha dalla fig. 75, che ridisegniamo in fig. 76

$$v_2(F) = \frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} + \frac{(X_2l)l^2}{2EI} + k[(X_1 + X_2)l + X_2l]l .$$

Calcoliamo (in fig. 69) $v_2(C)$. Si ha dalla fig. 77 e dalla fig. 78

$$v_2(C) = -\frac{X_2(2l)^3}{3EI} + \frac{M(2l)^2}{2EI} - \frac{X_1l^3}{3EI} - \frac{X_1l^2}{2EI}l .$$

Calcoliamo (in fig. 69) $v_2(E)$. Per la [1] lo schema (inferiore) di fig. 69 è somma dello schema di fig. 79 e dello schema di fig. 80, in cui la sezione di incastro è ruotata dell'angolo $k(X_1l + X_2 \cdot 2l)$. In fig. 79 E si abbassa (tenuto conto dello

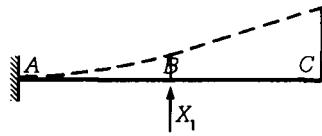


Fig. 78

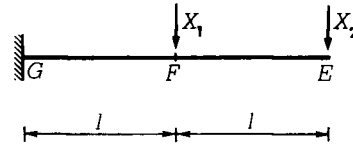


Fig. 79

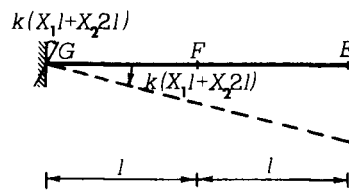


Fig. 80

schema di fig. 81) di

$$\frac{X_1 l^3}{3EI} + \frac{X_1 l^2}{2EI} l + \frac{X_2 (2l)^3}{3EI}.$$

Pertanto (fig. 80)

$$v_2(E) = \frac{X_1 l^3}{3EI} + \frac{X_1 l^2}{2EI} l + \frac{X_2 (2l)^3}{3EI} + k(X_1 l + X_2 2l) 2l.$$

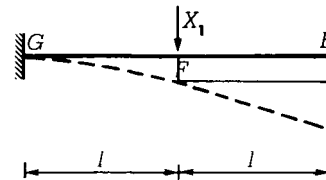


Fig. 81

In definitiva il sistema risolvete (algebrico lineare di due equazioni nelle due incognite X_1, X_2 , a matrice dei coefficienti non singolare) è

$$\frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} - \frac{(\mathcal{M} - X_2 l)l^2}{2EI} + \frac{(X_1 + X_2)l^3}{3EI} + \frac{X_2 l^3}{2EI} + k[(X_1 + X_2)l + X_2 l]l = -\frac{X_1 h}{EA}$$

$$\frac{X_2 (2l)^3}{3EI} - \frac{\mathcal{M} (2l)^2}{2EI} + \frac{X_1 l^3}{3EI} + \frac{X_1 l^3}{2EI} + \frac{X_1 l^3}{3EI} + \frac{X_1 l^3}{2EI} + \frac{X_2 (2l)^3}{3EI} + k(X_1 l + X_2 2l) 2l = -\frac{X_2 h}{EA}.$$

Determinati X_1 e X_2 , è facile tracciare i diagrammi M, T, N e, con essi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 68.

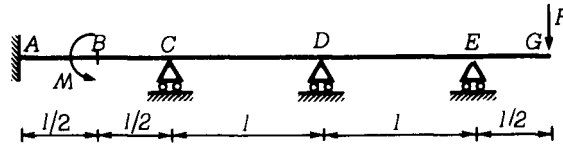


Fig. 82

3.2. Le equazioni dei tre momenti.

Il problema della trave inflessa continua e iperstatica è di rapida risoluzione quando si scrivono le equazioni di congruenza con la tecnica seguente, che va sotto il nome di *equazioni dei tre momenti*. Allo scopo di essere più chiari, facciamo riferimento alla struttura di fig. 82, che evidentemente è tre volte iperstatica (precisamente $l = 0, i = 3$).

Si sceglie come sistema equivalente quello in cui la struttura è costituita esclusivamente da travi appoggiate (ogni trave deve portare una cerniera a terra in ciascuno dei suoi estremi) collegate tra loro (tramite le cerniere a terra) (fig. 83). Il carico da applicare sulla struttura di fig. 83 è, per il secondo principio di sezionamento, quello di fig. 84. Infatti l'incastro A è stato degradato in una cerniera a terra. Quindi il momento (di reazione) che l'incastro in fig. 82 scarica sulla trave va applicato in fig. 84 come carico (sulla sezione A_d della trave $A_d C_s$). Circa la sezione appoggiata C, in fig. 82 la situazione (statica) è quella di fig. 85. Osserviamo subito che per il primo principio di sezionamento il tronco elementare di trave $C_s C_d$ (fig. 85) è in equilibrio alla rotazione. Quindi i momenti in C_s e C_d , come evidenziato in fig. 85, hanno eguale intensità e verso opposto (sicché in C_s e C_d le fibre tese stanno dalla stessa parte). Con la

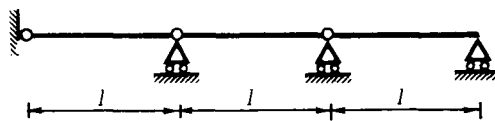


Fig. 83

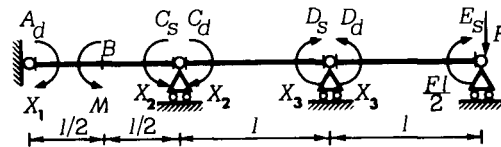


Fig. 84

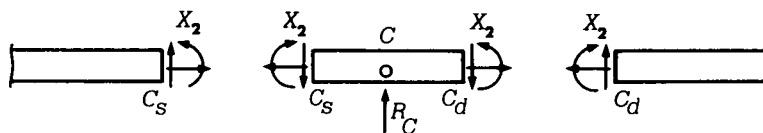


Fig. 85

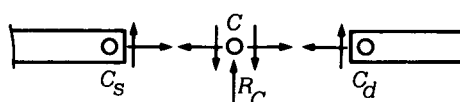


Fig. 86

struttura di fig. 83, invece, la situazione statica in corrispondenza del primo carrello è quella di fig. 86. Quindi, per il secondo principio di sezionamento, per ottenere un problema equivalente bisogna applicare nella sezione C_s della struttura di fig. 83 come carico il momento che nello schema effettivo la parte di destra scaricava (attraverso C_s) su quella di sinistra e che nel nuovo schema (fig. 86) la parte di destra non può più scaricare su quella di sinistra (attraverso C_s). Così in C_d bisogna applicare sulla trave $C_d D_s$ (fig. 84) il momento che (fig. 85) la parte di sinistra (tronco $C_s C_d$) scarica su quella di destra (trave $C_d D E G$) attraverso la sezione C_d . Analogamente si procede per la sezione appoggiata D di fig. 82. Circa la sezione E_s , il momento flettente vi è noto. Esso è chiaramente (fig. 82) pari a $Fl/2$ e sono tese le fibre superiori. Così, il sistema equivalente a quello di fig. 82 è quello di fig. 84. Ne segue, per il secondo principio di sezionamento, che la linea elastica dello schema di fig. 82 e quella dello schema di fig. 84 coincidono. Pertanto la rotazione $\varphi(A_d)$ della sezione A_d in fig. 84 deve essere pari a zero perché in $A (= A_d)$ vi è in fig. 82 un incastro (rigido). La rotazione $\varphi(C_s)$ della sezione C_s in fig. 84 deve essere eguale alla rotazione $\varphi(C)$ della sezione $C (\cong C_s)$ in fig. 82. La rotazione $\varphi(C_d)$ della sezione C_d in fig. 84 deve essere eguale alla rotazione $\varphi(C)$ della sezione $C (\cong C_d)$ in fig. 82. Deve perciò essere, in fig. 84,

$$\varphi(C_s) = \varphi(C_d) .$$

Analogamente, si ha che le sezioni D_s e D_d in fig. 84 devono ruotare di uno stesso angolo. Abbiamo così assunto come incognite (iperstatiche) i momenti flettenti nei nodi e scritto, per determinarli, tre equazioni di congruenza (esprimenti il fatto che la trave di fig. 82 non si deve spezzare nei nodi A, B, C)

$$\begin{aligned} \varphi(A_d) &= 0 \\ \varphi(C_s) &= \varphi(C_d) \\ \varphi(D_s) &= \varphi(D_d) . \end{aligned}$$

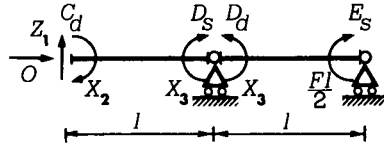


Fig. 87

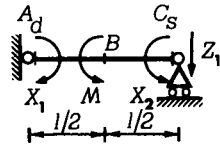


Fig. 88

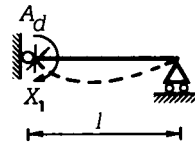


Fig. 89

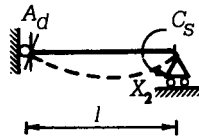


Fig. 90

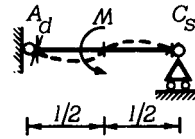


Fig. 91

Ciascuna di tali equazioni viene detta equazione dei tre momenti (perché, come vedremo subito, in genere vi compaiono tre momenti incogniti). Esplicitiamole.

Circa $\varphi(A_d)$, consideriamo il problema di fig. 84 e osserviamo (fig. 87) che l'azione del perno C sulla trave C_dD_s è verticale. Pertanto, per il secondo principio di sezionamento, lo schema di fig. 88 equivale (per le parti comuni) a quello di fig. 84 (la spinta Z_1 è ovviamente applicata proprio sul perno C). Conseguentemente $\varphi(A_d)$ si può calcolare sullo schema di fig. 88 anziché su quello di fig. 84. Per calcolare $\varphi(A_d)$ in fig. 88 consideriamo il problema di fig. 89 e denotiamone con $\varphi_1(A_d)$ la rotazione della sezione appoggiata di destra A_d ; consideriamo il problema di fig. 90 e denotiamone con $\varphi_2(A_d)$ la rotazione della sezione A_d ; consideriamo il problema di fig. 91 e denotiamone con $\varphi_3(A_d)$ la rotazione della sezione A_d ; consideriamo il problema di fig. 92 e denotiamone con $\varphi_4(A_d)$ la rotazione della sezione A_d . Rileviamo anzitutto che, per il principio di sovrapposizione degli effetti

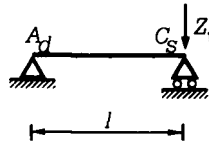


Fig. 92

$$\varphi(A_d) = \varphi_1(A_d) + \varphi_2(A_d) + \varphi_3(A_d) + \varphi_4(A_d) .$$

Scegliamo quindi, per la prima equazione dei tre momenti, positive le rotazioni orarie e osserviamo che in fig. 89 A_d ruota in verso orario e, per la (12) del cap. 17

$$\varphi_1(A_d) = \frac{X_1 l}{3 EI} .$$

In fig. 90 A_d ruota in verso orario e, per la (13) del cap. 17

$$\varphi_2(A_d) = \frac{X_2 l}{6 EI} .$$

In fig. 91 A_d ruota in verso orario e si ha (problema 7 del cap. 17)

$$\varphi_3(A_d) = \frac{Ml}{24 EI} .$$

Calcoliamo $\varphi_4(A_d)$. Osserviamo in fig. 92 che M varia linearmente (infatti il carico distribuito sulla trave $A_d C_s$ è identicamente nullo). Inoltre il momento flettente in A_d e in C_s è zero (si tratta infatti di appoggi di estremità non caricati da coppie). Quindi $M = 0$ identicamente sulla trave. Quindi (osservazione 3 del cap. 17) la trave resta, dopo l'applicazione del carico, ad asse rettilineo. Essendo gli appoggi A_d e C_s rigidi, ne segue che la trave non si deforma (le Z_1 tonnellate applicate sono totalmente assorbite dall'appoggio di destra). Quindi $\varphi_4(A_d) = 0$. Pertanto la prima equazione dei tre momenti è

$$\frac{X_1 l}{3 EI} + \frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{Ml}{24 EI} = 0 .$$

Esplichiamo la seconda equazione dei tre momenti. Assumiamo stavolta positive le rotazioni antiorarie. Calcoliamo il primo membro dell'equazione, $\varphi(C_s)$, sullo schema equivalente di fig. 88. Si ha, per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\varphi(C_s) = \varphi_1(C_s) + \varphi_2(C_s) + \varphi_3(C_s) + \varphi_4(C_s)$$

dove la rotazione $\varphi_1(C_s)$ della sezione C_s di fig. 89 vale

$$\varphi_1(C_s) = \frac{X_1 l}{6 EI} ;$$

la rotazione $\varphi_2(C_s)$ della sezione C_s in fig. 90 vale

$$\varphi_2(C_s) = \frac{X_2 l}{3 EI} ;$$

la rotazione $\varphi_3(C_s)$ della sezione C_s in fig. 91 vale

$$\varphi_3(C_s) = -\frac{Ml}{24 EI} ;$$

la rotazione $\varphi_4(C_s)$ della sezione C_s in fig. 92 vale (abbiamo visto che la linea elastica è la funzione identicamente nulla)

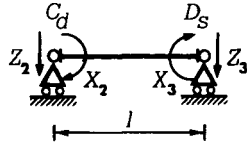


Fig. 93

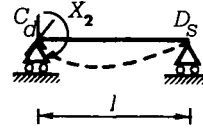


Fig. 94

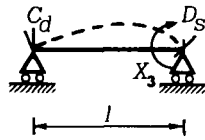


Fig. 95

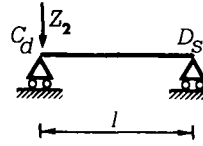


Fig. 96

$$\varphi_4(C_s) = 0 .$$

Pertanto il primo membro della seconda equazione dei tre momenti si scrive

$$\frac{X_1 l}{6 EI} + \frac{X_2 l}{3 EI} - \frac{M l}{24 EI} .$$

A secondo membro, va esplicitata $\varphi(C_d)$. Anche qui (anziché eseguire il calcolo di $\varphi(C_d)$ in fig. 84) conviene isolare la trave a cui C_d appartiene. Si ottiene, (in fig. 84 si vede immediatamente che le spinte orizzontali delle cerniere sono tutte nulle), ricorrendo al secondo principio di sezionamento, che lo schema di fig. 93 equivale a quello di fig. 84. Denotiamo con $\varphi_1(C_d)$ la rotazione della sezione C_d in fig. 94, con $\varphi_2(C_d)$ la rotazione della sezione C_d in fig. 95, con $\varphi_3(C_d)$ la rotazione della sezione C_d in fig. 96, con $\varphi_4(C_d)$ la rotazione della sezione C_d in fig. 97. Evidentemente in fig. 94 si ha

$$\varphi_1(C_d) = -\frac{X_2 l}{3 EI} ;$$

in fig. 95 si ha

$$\varphi_2(C_d) = \frac{X_3 l}{6 EI} ;$$

in fig. 96 si ha (la trave resta nella condizione iniziale)

$$\varphi_3(C_d) = 0 ;$$

in fig. 97 si ha

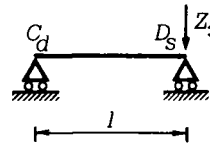


Fig. 97

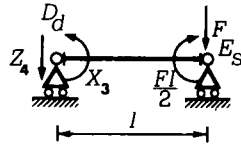


Fig. 98

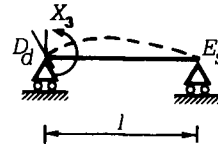


Fig. 99

$$\varphi_4(C_d) = 0 .$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha in fig. 93 (e quindi in fig. 84)

$$\varphi(C_d) = \varphi_1(C_d) + \varphi_2(C_d) + \varphi_3(C_d) + \varphi_4(C_d) = -\frac{X_2 l}{3 EI} + \frac{X_3 l}{6 EI} .$$

Pertanto la seconda equazione dei tre momenti è

$$\frac{X_1 l}{6 EI} + \frac{X_2 l}{3 EI} - \frac{M l}{24 EI} = -\frac{X_2 l}{3 EI} + \frac{X_3 l}{6 EI} .$$

Esplicitiamo infine la terza equazione dei tre momenti $\varphi(D_s) = \varphi(D_d)$ (fig. 84). Per essa assumiamo positive le rotazioni orarie. Per calcolare $\varphi(D_s)$ isoliamo in fig. 84 la trave cui appartiene D_s . Si ottiene così come schema equivalente quello di fig. 93. Dalla sovrapposizione degli effetti si ha

$$\varphi(D_s) = \varphi_1(D_s) + \varphi_2(D_s) + \varphi_3(D_s) + \varphi_4(D_s) .$$

Evidentemente in fig. 94 si ha

$$\varphi_1(D_s) = -\frac{X_2 l}{6 EI} ;$$

in fig. 95 si ha

$$\varphi_2(D_s) = \frac{X_3 l}{3 EI} ;$$

in fig. 96 si ha

$$\varphi_3(D_s) = 0 ;$$

in fig. 97 si ha

$$\varphi_4(D_s) = 0 .$$

Pertanto il primo membro della terza equazione dei tre momenti si scrive

$$-\frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{X_3 l}{3 EI} .$$

Calcoliamo $\varphi(D_d)$ in fig. 84. Isoliamo la trave cui appartiene D_d . Si ottiene lo schema di fig. 98 (Z_4 è applicata sul perno D). Quindi $\varphi(D_d)$ si può calcolare in fig. 98. Per la sovrapposizione degli effetti

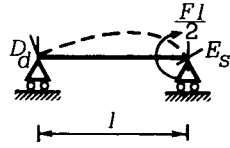


Fig. 100

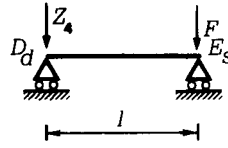


Fig. 101

$$\varphi(D_d) = \varphi_1(D_d) + \varphi_2(D_d) + \varphi_3(D_d)$$

dove $\varphi_1(D_d)$ è la rotazione della sezione D_d in fig. 99; $\varphi_2(D_d)$ è la rotazione della sezione D_d in fig. 100; $\varphi_3(D_d)$ è la rotazione della sezione D_d in fig. 99. Evidentemente in fig. 99 si ha

$$\varphi_1(D_d) = -\frac{X_3 l}{3 EI} ;$$

in fig. 100 si ha

$$\varphi_2(D_d) = -\left(\frac{Fl}{2}\right) \frac{l}{6 EI} ;$$

in fig. 101 si ha

$$\varphi_3(D_d) = 0 .$$

In conclusione la terza equazione dei tre momenti si scrive

$$-\frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{X_3 l}{3 EI} = -\frac{X_3 l}{3 EI} - \frac{Fl^2}{12 EI} .$$

Così il sistema (risolvente) delle tre equazioni dei tre momenti è

$$\begin{aligned} \frac{X_1 l}{3 EI} + \frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{Ml}{24 EI} &= 0 \\ \frac{X_1 l}{6 EI} + \frac{X_2 l}{3 EI} - \frac{Ml}{24 EI} &= -\frac{X_2 l}{3 EI} + \frac{X_3 l}{6 EI} \\ -\frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{X_3 l}{3 EI} &= -\frac{X_3 l}{3 EI} - \frac{Fl^2}{12 EI} . \end{aligned}$$

È un sistema algebrico lineare di tre equazioni nelle tre incognite X_1, X_2, X_3 . Poiché il determinante della sua matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 4 - 2 = 26$$

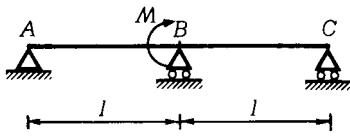


Fig. 102

e quindi è diverso da zero, per un celebre teorema dell'*Algebra lineare* il sistema ammette una e una sola soluzione. Trovati poi i valori di X_1, X_2, X_3 , in fig. 84 si tracciano immediatamente il diagramma del momento flettente e quello del taglio. La tecnica di soluzione che è stata illustrata consente di scrivere e di risolvere molto rapidamente il sistema di equazioni risolvente.

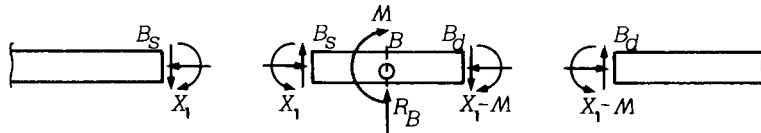


Fig. 103

PROBLEMA 14. Verificare la sicurezza della trave continua di fig. 102.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T della struttura, già realizzata, di fig. 102. Il problema è una volta iperstatico. Denotiamo con X_1 il momento flettente in B_s in fig. 102 e supponiamo che sia di verso tale che in B_s sono tese le fibre superiori (fig. 103); osserviamo che, per il primo principio di sezionamento (applicato al tronco $B_s B_d$ di fig. 103), il momento flettente in B_d è quello indicato in fig. 103. Perciò il sistema equivalente a quello di fig. 102 da assumere è quello di fig. 104. L'equazione (dei tre momenti) risolvente è pertanto (fig. 104)

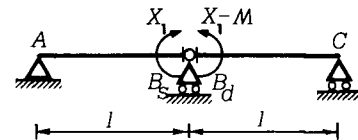


Fig. 104

$$\varphi(B_s) = \varphi(B_d) .$$

Valutiamo $\varphi(B_s)$ (in fig. 104). Per il secondo principio di sezionamento lo schema di fig. 105 è equivalente a quello di fig. 104. Quindi $\varphi(B_s)$ è somma di $\varphi_1(B_s)$ (relativa allo schema di fig. 106) e di $\varphi_2(B_s)$ (relativa allo schema di

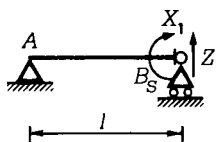


Fig. 105

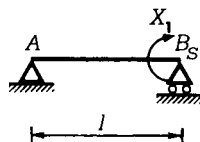


Fig. 106

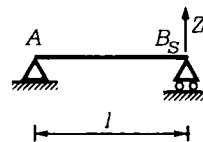


Fig. 107

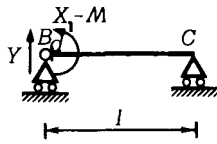


Fig. 108

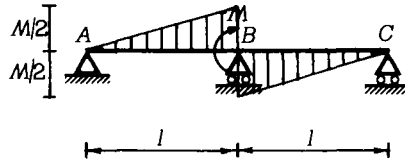


Fig. 109

fig. 107). Assumendo positive le rotazioni orarie, si ha

$$\varphi_1(B_s) = \frac{X_1 l}{3 EI}, \quad \varphi_2(B_s) = 0.$$

Pertanto

$$\varphi(B_s) = \frac{X_1 l}{3 EI}.$$

Valutiamo $\varphi(B_d)$. Per il secondo principio di sezionamento lo schema di fig. 104 è equivalente a quello di fig. 108. Ne segue, ragionando come prima

$$\varphi(B_d) = -\frac{(X_1 - \mathcal{M})l}{3 EI}.$$

Pertanto l'equazione risolvente è

$$\frac{X_1 l}{3 EI} = -\frac{(X_1 - \mathcal{M})l}{3 EI}.$$

Ne segue

$$X_1 = -(X_1 - \mathcal{M})$$

e di qui

$$X_1 = \frac{\mathcal{M}}{2}.$$

Pertanto il diagramma dei momenti in fig. 102 è quello di fig. 109. È facile ora tracciare il diagramma del taglio e, quindi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 102.

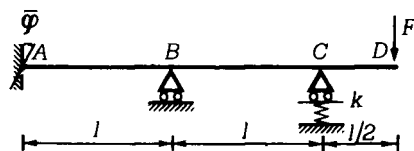


Fig. 110

PROBLEMA 15. Verificare la sicurezza della trave continua di fig. 110.

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T della trave, già realizzata, di fig. 110. La struttura è due volte iperstatica. Osserviamo che sullo sbalzo CD il momento flettente è noto (fig. 111). Quindi in C_s (e in C e in C_d) il momento

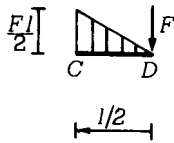


Fig. 111

flettente vale $F l / 2$ e sono tese le fibre superiori. Il sistema equivalente a quello di fig. 110 da assumere è pertanto quello di fig. 112. Assumendo positive le rotazioni antiorarie, le equazioni dei tre momenti si scrivono (fig. 112)

$$\begin{aligned} \varphi(A_d) &= -\bar{\varphi} \\ \varphi(B_s) &= \varphi(B_d) \end{aligned}$$

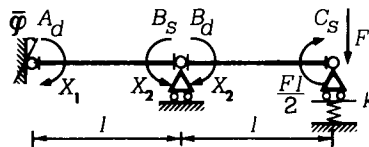


Fig. 112

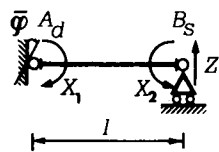


Fig. 113

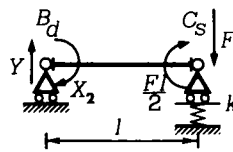


Fig. 114

Calcoliamo $\varphi(A_d)$ (in fig. 112). Per il secondo principio di sezionamento, è lecito calcolare $\varphi(A_d)$ in fig. 113. Si ha, per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\varphi(A_d) = -\frac{X_1 l}{3 EI} - \frac{X_2 l}{6 EI} .$$

Calcoliamo $\varphi(B_s)$ (in fig. 113 e quindi anche in fig. 112). Si ha, per il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\varphi(B_s) = \frac{X_1 l}{6 EI} + \frac{X_2 l}{3 EI} .$$

Valutiamo $\varphi(B_d)$ (in fig. 112). Per il secondo principio di sezionamento, è lecito calcolare $\varphi(B_d)$ in fig. 114. Osserviamo che in fig. 114 per il primo principio di sezionamento l'azione del carrello di destra sul perno C è quella indicata in fig. 115; conseguentemente il perno C si abbassa, in fig. 114, di

$$k \left(\frac{3F}{2} + \frac{X_2}{l} \right) .$$

Ne segue, tenendo conto della [1] e del principio di sovrapposizione degli effetti

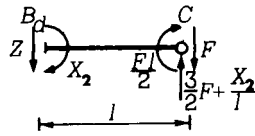


Fig. 115

$$\varphi(B_a) = -\frac{X_2 l}{3EI} + F \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{6EI} - \frac{1}{l} \left[k \left(\frac{3F}{2} + \frac{X_2}{l} \right) \right]$$

Il sistema (delle equazioni dei tre momenti) risolvente è pertanto

$$\frac{X_1 l}{3EI} + \frac{X_2 l}{6EI} = \bar{\varphi}$$

$$\frac{X_1 l}{6EI} + \frac{X_2 l}{3EI} = -\frac{X_2 l}{3EI} + \frac{Fl^2}{12EI} - \frac{3kF}{2l} - \frac{kX_2}{l^2}$$

Con ciò è possibile tracciare i diagrammi M, T e, con essi, verificare la sicurezza della struttura di fig. 110.

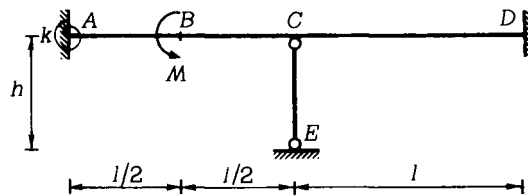


Fig. 116

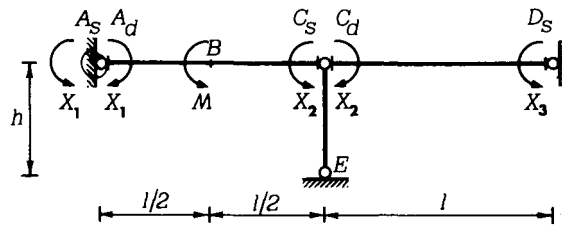


Fig. 117

PROBLEMA 16. Verificare la sicurezza della struttura di fig. 116.

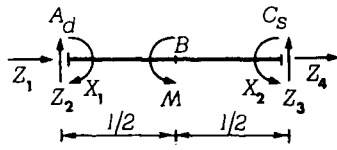


Fig. 118

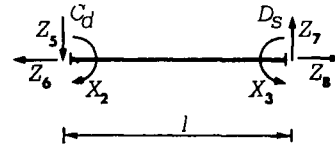


Fig. 119

Determiniamo anzitutto i diagrammi M, T, N della struttura, già realizzata, di fig. 116. La struttura è quattro volte iperstatica. Il sistema equivalente da assumere è evidentemente quello di fig. 117. Le equazioni dei tre momenti da scrivere sono

$$\begin{aligned} \varphi(A_s) &= \varphi(A_d) \\ \varphi(C_s) &= \varphi(C_d) \\ \varphi(D_s) &= 0 \end{aligned}$$

che esprimono la congruenza in A, C, D rispettivamente. Le esplichiamo qui di seguito, impiegando al solito il secondo principio di sezionamento, la [1], il primo principio di sezionamento e il principio di sovrapposizione degli effetti. Facciamo anche uso del risultato ottenuto da *Saint Venant* per il problema della trave di lunghezza h sottoposta a sforzo normale N baricentrico, che assicura che la lunghezza finale h' è tale che

$$h' - h = \frac{Nh}{EA}$$

se N è di trazione ed A è l'area della sezione retta della trave.

Precisamente con le notazioni di fig. 118 si ha (per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A_d)

$$Z_3 l + X_2 + M - X_1 = 0 ;$$

con le notazioni di fig. 119 si ha (per l'equilibrio alla rotazione intorno a D_s)

$$Z_5 l - X_2 + X_3 = 0 ;$$

con le notazioni di fig. 120 si ha (per l'equilibrio alla traslazione verticale)

$$R_{CE} + Z_5 - Z_3 = 0 .$$

Conseguentemente

$$R_{CE} = \frac{X_1 - M - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l}$$

e (fig. 121) il perno C in fig. 117 si abbassa di

$$\frac{R_{CE} h}{EA} = \frac{h}{EA} \left(\frac{X_1 - M - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l} \right) .$$

Pertanto, nell'applicare la [1], gli spostamenti (effettivi) verticali dei nodi sono quelli di fig. 122.

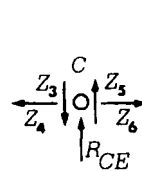


Fig. 120

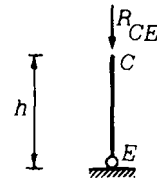


Fig. 121

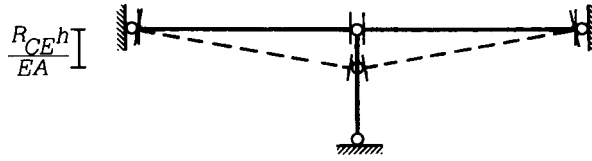


Fig. 122

Assumendo per tutte e tre le equazioni come rotazioni positive quelle orarie il sistema risolvibile è

$$\begin{aligned} \frac{X_1 l}{3 EI} - \frac{\mathcal{M} l}{24 EI} + \frac{X_2 l}{6 EI} + \frac{h}{lEA} \left(\frac{X_1 - \mathcal{M} - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l} \right) &= -kX_1 \\ -\frac{X_2 l}{3 EI} - \frac{X_1 l}{6 EI} + \frac{\mathcal{M} l}{24 EI} + \frac{h}{lEA} \left(\frac{X_1 - \mathcal{M} - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l} \right) &= \frac{X_2 l}{3 EI} + \frac{X_3 l}{6 EI} - \frac{h}{lEA} \left(\frac{X_1 - \mathcal{M} - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l} \right) \\ -\frac{X_2 l}{6 EI} - \frac{X_3 l}{3 EI} - \frac{h}{lEA} \left(\frac{X_1 - \mathcal{M} - X_2}{l} - \frac{X_2 - X_3}{l} \right) &= 0 . \end{aligned}$$

È facile ora tracciare i diagrammi M, T, N della struttura di fig. 116. Essi consentono di verificarne la sicurezza.

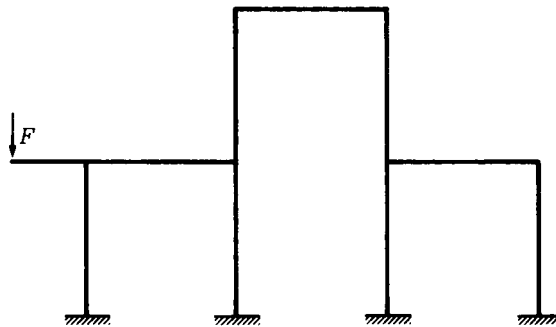


Fig. 123

3.3. Le equazioni dei quattro momenti.

Alcuni telai iperstatici possono essere risolti con un metodo molto simile all'equazione dei tre momenti, che va sotto il nome di *equazione dei quattro momenti*. Le strutture suscettibili di essere analizzate con tale metodo sono del tipo illustrato nei problemi seguenti. In esse, travi rettilinee vincolate solo agli estremi sono collegate con altre travi o con

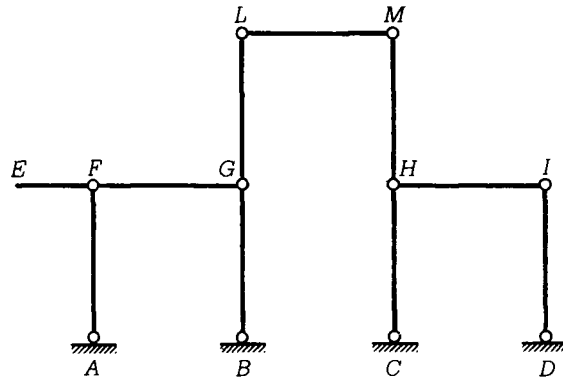


Fig. 124

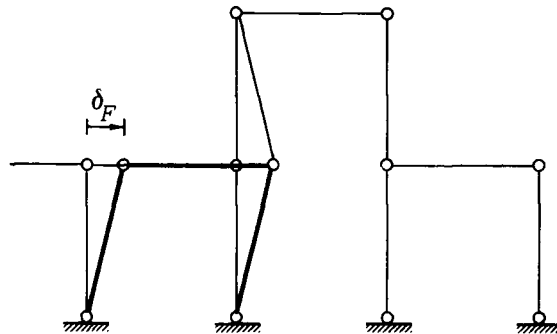


Fig. 125

la fondazione in punti che chiamiamo *nodi* del telaio. La struttura del sistema equivalente ha una cerniera in ogni nodo del telaio. Nel caso sia i volte labile, si dice che il telaio è ad m *nodi spostabili* se tra gli i parametri da fissare per individuare (nel piano) una configurazione della struttura del sistema equivalente vi sono m spostamenti orizzontali di cerniere.

Nel caso del telaio di fig. 123, la struttura del sistema equivalente è quella di fig. 124. Essa è chiaramente quattro volte labile e a tre nodi spostabili. Infatti fissando lo spostamento orizzontale della cerniera F si individua la configurazione dell'arco a quattro cerniere $AFBG$ (fig. 125) (come sempre, in questa fase, le travi sono considerate rigide). Analogamente, assegnando lo spostamento orizzontale della cerniera H si individua la configurazione dell'arco