

LA TRAVE A PARETE SOTTILE*

1. Generalità.

Chiamiamo *trave a parete sottile* una trave ad asse rettilineo, di lunghezza l ed a sezione costante, del tipo seguente. Nel piano della (generica) sezione retta esiste una curva γ , che chiamiamo *linea media* della sezione retta, aperta (fig. 1) o chiusa (fig. 2). Inoltre detti P un punto qualsiasi di γ , t la tangente a γ in P ed n la normale a t in P (figg. 1 e 2), l'intersezione tra n e la sezione retta A è un segmento c che chiamiamo *corda* e che ha per punto medio P . Ammettiamo ancora che c sia (in ogni punto di γ) trascurabile rispetto al diametro d del più piccolo cerchio contenente la sezione retta, e che d sia trascurabile rispetto ad l . Ancora, detti A e B gli estremi della corda c , ammettiamo che la tangente a ∂A in A e in B sia (praticamente) parallela a t (sicché la normale a ∂A in A e in B è praticamente parallela ad n). In tutti i rami dell'*Ingegneria strutturale* gli elementi strutturali monodimensionali sono frequentemente realizzati con travi a parete sottile. La sezione retta sottile consente infatti di sfruttare al massimo le possibilità di resistenza del materiale, nel senso che viene realizzato un (notevole) risparmio (in peso) di materiale. Alcune travi a parete (molto) sottile sono costituite da un rivestimento (cui è affidato il compito di assorbire le τ_z) sul quale sono chiodate (numerose) travi longitudinali (dette *longheroni* e che hanno il compito di assorbire le σ_z). A volte, nelle applicazioni più importanti, quando lo spessore della parete è molto piccolo diventa necessario, per questioni di stabilità dell'equilibrio (cap. 19), irrigidire con setti (detti *centine*) alcune sezioni rette della trave. È ovvio che in tal caso la trave non è a sezione costante. Inoltre, dalle (6), (22) e (41) del cap. 12 si trae che in generale in una trave a parete sottile gli allungamenti e gli scorrimenti (e di conseguenza le derivate parziali prime delle componenti dello spostamento)

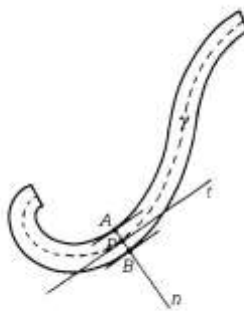


Fig. 1

 * A. Maceri, *La trave a parete sottile*, e-ISBN 978-88-85929-45-6, © Accademica 1999

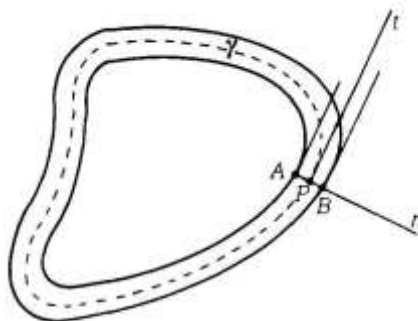


Fig. 2

forniti dalla soluzione di *Saint Venant* del problema dell'equilibrio elastico non sono ovunque piccoli. Pertanto occorre eseguire una nuova formulazione del problema dell'equilibrio elastico. Già da queste considerazioni si evince che la problematica relativa alla trave a parete sottile è molto ampia. Qui ci limiteremo ad esporre alcuni dei principali risultati disponibili. Si tratta di teorie tecniche (in cui cioè il ragionamento non è rigoroso), che hanno sempre fornito risultati soddisfacentemente confermati dalle esperienze condotte nei *Laboratori prove materiali* e dalla pratica costruttiva.

OSSERVAZIONE 1. Se la parete di una trave è molto sottile (è sperimentalmente provato che) il postulato di *Saint Venant* (può non essere valido sicché) va impiegato con cautela.

Consideriamo dunque una trave avente sezione retta sottile aperta o chiusa.

Una prima teoria tecnica consiste (semplicemente) nell'assumere validi i risultati di *Saint Venant* (cap. 12). Questi risultano soddisfacenti nei problemi dello sforzo normale baricentrico, della flessione retta, della flessione deviata e della pressoflessione. Nel caso della torsione, l'ipotesi che la sezione retta sia sottile permette di affiancare ai risultati di *Saint Venant* altre teorie tecniche che consentono una valutazione immediata dello stato tensionale. Nel caso del taglio, il fatto che lo spessore della parete della trave è piccolo rende praticamente esatta la formula di *Jourawski*. La trattazione approssimata del taglio verrà estesa alle sezioni sottili chiuse (cioè alle sezioni rette sottili pluriconnesse).

2. La torsione delle travi a parete sottile. 2.1. Generalità.

Consideriamo una mensola con la base di sinistra incastrata puntualmente (sicché la base di sinistra è libera

di ingobbarsi) e caricata solo sulla base di destra. La sezione retta è sottile aperta o chiusa. Detto z l'asse della trave, ammettiamo che la distribuzione di τ_z che nasce per effetto dell'applicazione del carico torcente soddisfi ancora le condizioni (cap. 12)

$$(1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_z &= 0 \quad \text{su } A \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z &= \text{cost.} \quad \text{su } A ; \end{aligned}$$

inoltre, per la simmetria delle τ ed essendo la superficie laterale scarica, riesce ancora

$$(2) \quad \boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{su } \partial A .$$

Con ciò, l'analogia idrodinamica può venire impiegata per analizzare la torsione delle sezioni sottili aperte o chiuse.

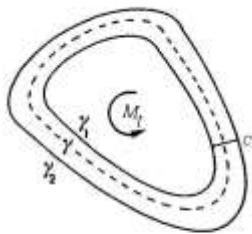


Fig. 3

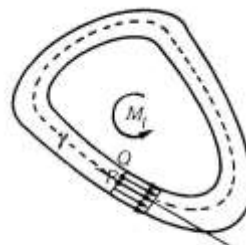


Fig. 4

2.2. La torsione delle sezioni sottili chiuse.

Consideriamo una trave di lunghezza l avente per sezione retta un'area A due volte connessa (⁶ del cap. 12). La sezione sia sottile e denotiamo con γ_1 e γ_2 le curve che costituiscono la frontiera ∂A di A (fig. 3). L'analogia idrodinamica fornisce, per una sezione di questo tipo, le seguenti indicazioni. Sia c una (generica) corda (fig. 3). In ogni punto Q di c \mathbf{v} (e quindi $\boldsymbol{\tau}_z$) ha intensità costante, direzione eguale a quella della tangente a γ in P e verso costantemente coerente con quello di M_t (fig. 4). Quindi, per il principio della costanza della portata, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\tau_z c = k$ in tutti i punti di γ . Conseguentemente

$$(3) \quad \tau_z = \frac{k}{c}$$

sicché se c varia (lungo γ) anche τ_z varia (lungo γ).

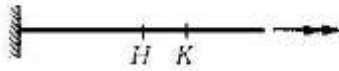


Fig. 5

OSSERVAZIONE 2. Nel caso della sezione in esame, il risultato $\tau_z c = k$ (lungo γ) si può ottenere anche con (semplici) considerazioni di equilibrio. Consideriamo infatti due sezioni (rette) H e K della trave (fig. 5). Consideriamo poi, del tronco di trave HK , la porzione individuata dalle corde c_1 e c_2 (fig. 6) e imponiamone l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse (della trave) z . Appliciamo dunque il principio di sezionamento. Dobbiamo applicare sulle porzioni delle sezioni H e K di fig. 6 σ_z e τ_z ; sul rettangolo $ABA'B'$ [risp. $CDC'D'$] di fig. 6 σ_{η_1} [risp. σ_{η_2}] e τ_{η_1} [risp. τ_{η_2}]. Però, le τ_z distribuite sulle porzioni di H e K hanno proiezione (ortogonale) su z nulla; così pure le σ_{η_1} [risp. σ_{η_2}] e le $\tau_{\eta_1\xi_1}$ [risp. $\tau_{\eta_2\xi_2}$] distribuite sul rettangolo $ABA'B'$ [risp. $CDC'D'$] hanno proiezione (ortogonale) su z nulla¹.

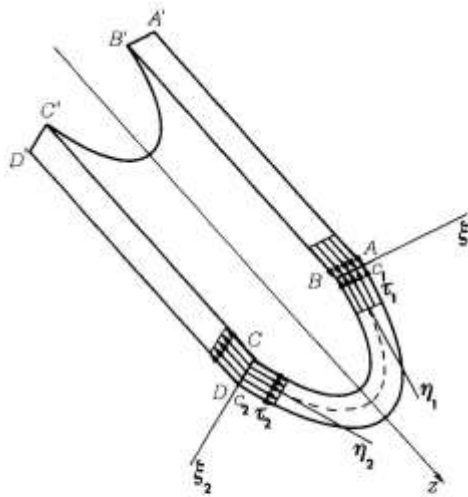


Fig. 6

¹ Stiamo denotando con ξ_1 [risp. ξ_2] la retta per A e per B [risp. per C e D] e con η_1 [risp. η_2] la retta ortogonale sia a z che a ξ_1 [risp. ξ_2] (fig. 6). Inoltre stiamo assumendo, sulla base delle (23) del cap. 12, che le σ_z sono ovunque nulle.

Perciò¹ occorre portare in conto soltanto le $\tau_{\eta_{1z}}$ e le $\tau_{\eta_{2z}}$. Ovviamente, poiché lo stato tensionale nella torsione non dipende da z e l'analogia idrodinamica assicura che τ_z è costante lungo ogni corda, sul rettangolo $ABA'B'$ le $\tau_{\eta_{1z}}$ [risp. $\tau_{\eta_{2z}}$] sono costanti. Poniamo $\tau_1 = \tau_{\eta_{1z}}$ [risp. $\tau_2 = \tau_{\eta_{2z}}$]. Si ha quindi (fig. 6)

$$\tau_1 c_1 \text{dist}(H, K) - \tau_2 c_2 \text{dist}(H, K) = 0$$

e di qui

$$\tau_1 c_1 = \tau_2 c_2 .$$

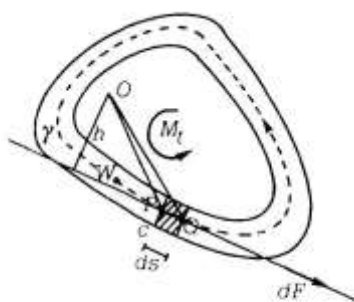


Fig. 7

Ricaviamo k (imponendo una condizione di equilibrio). È ovvio per il principio di sezionamento che in ogni sezione K (fig. 5) della trave il sistema delle τ_z distribuite sull'area A è equivalente al sistema costituito dall'unica coppia (torcente) M_t . Introduciamo su γ un'ascissa curvilinea s (cioè scegliamo un punto W di γ come origine, un verso di percorrenza di γ e ad ogni punto P di γ associamo il numero (reale) dato dalla lunghezza s^2 della porzione di γ individuata dai punti W, P presa col segno più [risp. meno] se P segue [risp. precede] W nel verso di percorrenza di γ (fig. 7). Consideriamo due punti P e Q di γ vicinissimi (fig. 7). Allora, posto (fig. 7) $ds = s(Q) - s(P)$, denotiamo con c la corda per P e tracciamo la corda per Q . Abbiamo così individuato un'area elementare dA di A . Poiché τ_z è costante nei punti di c e ds è piccolissimo, possiamo ammettere che su dA τ_z è costante. È ovvio poi che il sistema delle τ_z distribuite su dA equivale al sistema costituito dall'unica forza $dF = \tau_z dA$ avente per retta d'azione la tangente in P a γ e per verso quello delle τ_z (fig. 7). Detto allora O un punto (qualsiasi) del piano, deve essere, denotando con h il braccio di dF rispetto ad O (fig. 7)

$$(4) \quad M_t = \int_A dM = \int_A (dF)(h) = \int_A \tau_z h dA .$$

Poiché (con approssimazione tanto migliore quanto più piccolo è ds) riesce $dA = c ds$, si ha³ che l'integrale doppio che figura nella (4) è eguale ad un integrale curvilineo esteso all'intera curva chiusa γ , che si ottiene

² Si dimostra nella *Teoria dell'integrazione* che s è eguale all'integrale curvilineo $\int_{\gamma}^{W,P} ds$.

³ Per noti teoremi della *Teoria dell'integrazione*.

formalmente sostituendo $c ds$ a dA . Pertanto, tenendo conto della (4) e del fatto che K è una costante

$$(5) \quad M_t = \int_A \tau_z h dA = \int_\gamma \tau_z h c ds = \int_\gamma \frac{k}{c} h c ds = k \int_\gamma h ds .$$

Osserviamo che $\frac{h ds}{2}$ è l'area del triangolo di vertici O, P, Q (fig. 7). Denotiamo con $d\Omega$ tale area, sicché

$$h ds = 2 d\Omega .$$

Pertanto si ha³ che l'integrale curvilineo che figura nella (5) è eguale ad un integrale doppio esteso all'area Ω racchiusa nella linea media γ (fig. 8)

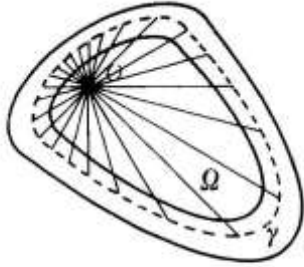


Fig. 8

$$M_t = k \int_\gamma h ds = k \int_\Omega 2 d\Omega = 2k \int_\Omega d\Omega = 2k\Omega .$$

Di qui e dalla (3) si ottiene

$$(6) \quad \tau_z = \frac{M_t}{2\Omega c}$$

che va sotto il nome di *formula di Bredt*⁴.

Ricaviamo ora, per la sezione di fig. 3, un'espressione dell'angolo unitario di torsione ϑ . Il lavoro di deformazione L compiuto durante l'applicazione del carico sulla trave è (assumiamo dalla trattazione esatta che la sezione di ascissa z ruota di ϑz)

$$L = \frac{1}{2} M_t \vartheta l .$$

Denotiamo con E l'integrale del potenziale elastico φ esteso al volume V della trave; pertanto, per le (23) del cap. 12 e per le (1) del cap. 5

$$\begin{aligned} E &= \int_V \varphi dV = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV = \\ &= \int_V \frac{1}{2} (\tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV = \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) dV = \frac{1}{2G} \int_V \tau_z^2 dV . \end{aligned}$$

Di qui, applicando il teorema di *Fubini*⁵ (che consente di esprimere un integrale triplo tramite un integrale definito di un integrale doppio), si ottiene

$$E = \frac{1}{2G} \int_V \tau_z^2 dV = \frac{1}{2G} \int_0^l \left(\int_A \tau_z^2 dA \right) dz .$$

³ R. Bredt, 1896.

⁵ Guido Fubini, Venezia 1879 - New York 1943.

Poiché nella torsione lo stato tensionale è indipendente da z , l'integrale doppio è costante rispetto a z . Ne segue

$$E = \frac{1}{2G} \left(\int_A \tau_z^2 dA \right) \int_0^l dz = \frac{l}{2G} \int_A \tau_z^2 dA$$

e di qui e dalla (6) si ha

$$E = \frac{l}{2G} \int_A \tau_z^2 dA = \frac{l}{2G} \int_\gamma \tau_z^2 c ds = \frac{l}{2G} \int_\gamma \left(\frac{M_t}{2\Omega c} \right)^2 c ds = \frac{l M_t^2}{8 G \Omega^2} \int_\gamma \frac{c}{c^2} ds = \frac{l M_t^2}{8 G \Omega^2} \int_\gamma \frac{1}{c} ds .$$

Così, essendo $L = E$ (cap. 8)

$$\frac{1}{2} M_t \vartheta l = L = E = \frac{l M_t^2}{8 G \Omega^2} \int_\gamma \frac{1}{c} ds$$

e di qui

$$(7) \quad \vartheta = \frac{l M_t^2}{8 G \Omega^2} \int_\gamma \frac{1}{c} ds .$$

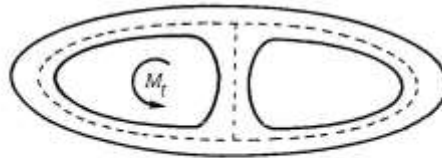


Fig. 9

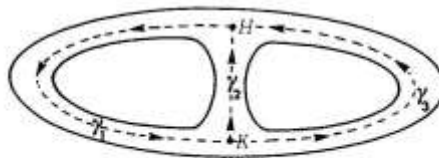


Fig. 10

Nell'Ingegneria strutturale le sezioni sottili sottoposte a torsione hanno spesso un grado di connessione (⁶ del cap. 12) maggiore di due. Per esse si può impiegare un metodo di calcolo che elabora quello che ha condotto alla formula di *Bredt* e che esemplifichiamo per la sezione sottile tre volte connessa di fig. 9. La linea media della sezione è costituita da tre archi di curva $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ di estremi H e K (fig. 10) e che orientiamo in modo che le curve chiuse (costituite da) γ_1, γ_2 e γ_1, γ_3 si possono percorrere in senso antiorario (fig. 10).

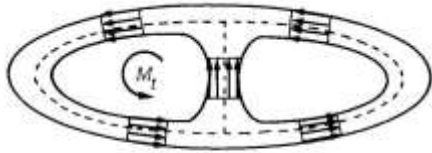


Fig. 11

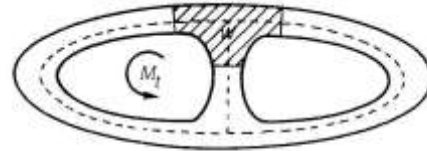


Fig. 12

L'analogia idrodinamica fornisce, per una sezione di questo tipo, le seguenti indicazioni. Consideriamo una (generica) corda. In ogni punto della corda ν (e quindi τ_z) ha intensità costante, direzione eguale a quella della tangente alla linea media nel punto medio della corda e come verso quello (coerente con M_t) indicato in fig. 11. Quindi, per il principio della costanza della portata, esistono tre numeri (reali) t_1, t_2, t_3 tali che

$$(8) \quad \begin{aligned} \tau_z c &= t_1 && \text{su } \gamma_1 \\ \tau_z c &= t_2 && \text{su } \gamma_2 \\ \tau_z c &= t_3 && \text{su } \gamma_3 . \end{aligned}$$

Denotiamo (come al solito) con ϑ l'angolo unitario di torsione (della sezione di fig. 9). Scriveremo ora un sistema algebrico lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite t_1, t_2, t_3, ϑ (a matrice dei coefficienti non singolare). La sua (unica) soluzione risolve completamente (o meglio semplicemente e con approssimazione soddisfacente) il problema della torsione per la sezione retta di fig. 9. Infatti noti t_1, t_2, t_3 le (8) forniscono la τ_z in ogni punto della linea media (e quindi della sezione retta).

La prima equazione del sistema risolvente si ottiene applicando il teorema della divergenza (²³ del cap. 12) alla porzione W di A individuata da una corda c_1 di γ_1 , da una corda c_2 di γ_2 , da una corda c_3 di γ_3 (fig. 12). Per le (32) il flusso di τ_z uscente da ∂W deve essere nullo (²⁸ del cap. 12). Pertanto, tenendo conto delle (8) (figg. 12 e 11)

$$(9) \quad t_1 - t_2 - t_3 = 0 .$$

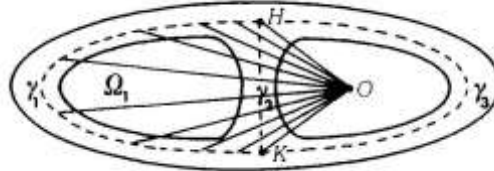


Fig. 13

Evidentemente (osservazione 1) abbiamo imposto una condizione di equilibrio. Una seconda condizione di equilibrio fornisce la seconda equazione del sistema risolvibile. Imponiamo infatti che il sistema delle τ_z distribuite sull'area A di fig. 9 equivale al sistema costituito dall'unica coppia (torcente) M_t . Sia O un punto del piano della sezione retta (fig. 13). Assumiamo positivi i momenti antiorari e denotiamo con M_1 il momento rispetto ad O del sistema (di forze) costituito dalle τ_z distribuite sulla porzione A_1 di A individuata dalla linea mediana γ_1 (fig. 13). Detta Ω_1 l'area individuata da γ_1 e dai punti O, H e K (fig. 13), lo stesso procedimento che ha condotto alla formula di *Bredt* fornisce (fig. 11), tenendo conto delle (8)

$$(10) \quad M_1 = \int_{A_1} dM = \int_{A_1} dF \cdot h = \int_{A_1} \tau_z dA \cdot h = \int_{\gamma_1}^{H,K} \tau_z h c ds = t_1 \int_{\gamma_1}^{H,K} h ds = t_1 \int_{\Omega_1} 2 d\Omega = \\ = 2t_1 \int_{\Omega_1} d\Omega = 2 t_1 \Omega_1 .$$

Denotiamo con M_2 il momento rispetto ad O del sistema costituito dalle τ_z distribuite sulla porzione A_2 di A individuata dalla linea mediana γ_2 (fig. 14). Detta Ω_2 l'area individuata da γ_2 e dai punti O, H e K (fig. 14), risulta (fig. 11), tenendo conto delle (8)

$$(11) \quad M_2 = \int_{A_2} dM = - \int_{A_2} \tau_z h dA = - \int_{\gamma_2}^{H,K} \tau_z h c ds = -t_2 \int_{\gamma_2}^{H,K} h ds = -t_2 \int_{\Omega_2} 2 d\Omega = -2 t_2 \Omega_2 .$$

Denotiamo con M_3 il momento rispetto ad O del sistema costituito dalle τ_z distribuite sulla porzione A_3 di A individuata dalla linea mediana γ_3 (fig. 15). Detta Ω_3 l'area individuata da γ_3 e dai punti O, H e K (fig. 15), risulta (fig. 11), tenendo conto delle (8)

$$(12) \quad M_3 = \int_{A_3} dM = \int_{A_3} \tau_z h dA = \int_{\gamma_3}^{H,K} \tau_z h c ds = t_3 \int_{\gamma_3}^{H,K} h ds = t_3 \int_{\Omega_3} 2 d\Omega = 2 t_3 \Omega_3 .$$

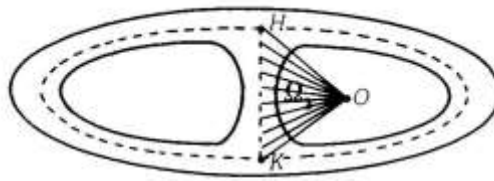


Fig. 14

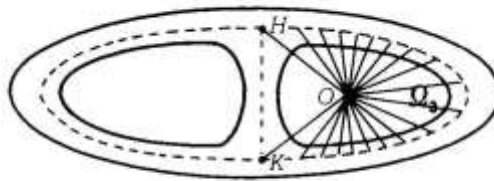


Fig. 15

Dalla *Teoria dei sistemi di forze* (cap. 1) e dalle (10), (11) e (12) segue allora

$$(13) \quad 2 \Omega_1 t_1 - 2 \Omega_2 t_2 + 2 \Omega_3 t_3 = M_t .$$

Per scrivere la terza e la quarta equazione del sistema risolvete facciamo uso del seguente teorema⁶

[1] (Stokes ⁷) *Siano D una porzione dello spazio (a tre dimensioni), S una superficie (regolare) contenuta in D e delimitata da una curva chiusa γ , \mathbf{v} una funzione vettoriale definita in D. La circuitazione di \mathbf{v} lungo γ è eguale al flusso del rotore di \mathbf{v} attraverso S (fig. 16).*

La funzione (vettoriale) $\boldsymbol{\tau}_z$ ha rotore costante in A ((32) del cap. 12)

$$\text{rot} \boldsymbol{\tau}_z = 2G\theta \quad \text{in } A$$

Denotiamo con S_{12} [risp. S_{13}] la porzione di piano (della sezione retta) individuata dalla curva chiusa costituita da γ_1 e γ_2 [risp. γ_1 e γ_3] e orientata come in fig. 17 [risp. 18]. Prolunghiamo su S_{13} la funzione τ_z in

⁶Di impiego frequente in *Fisica matematica*.

⁷*Sir George Gabriel Stokes*, Skreen 1819 - Cambridge 1903.

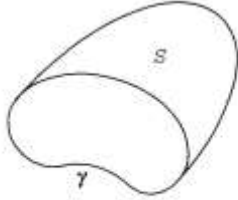


Fig. 16

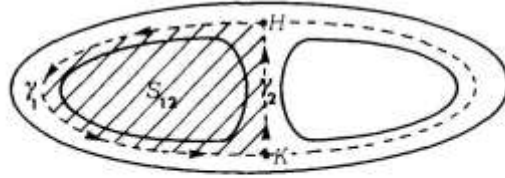


Fig. 17

modo che risulti

$$(14) \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z = 2G\vartheta \quad \text{in } S_{13} .$$

Applicando il teorema di *Stokes* alla superficie S_{12} delimitata dalla curva chiusa costituita da γ_1 e γ_2 (fig. 17) e tenendo conto del verso delle $\boldsymbol{\tau}_z$ (fig. 11), del fatto che $\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z$ è normale in ogni punto di S_{13} ad S_{13} , delle (8) e del fatto che $\boldsymbol{\tau}_z$ è tangente alla linea media in ogni suo punto, si ottiene

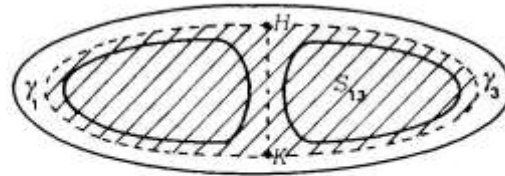


Fig. 18

$$\begin{aligned} 2G\vartheta S_{12} &= 2G\vartheta \int_{S_{12}} d\sigma = \int_{S_{12}} 2G\vartheta d\sigma = \int_{S_{12}} \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z d\sigma = \int_{S_{12}} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{n}) d\sigma = \\ &= \int_{\gamma_1}^{H,K} (\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{t}) ds + \int_{\gamma_2}^{K,H} (\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{t}) ds = \int_{\gamma_1}^{H,K} \tau_z ds + \int_{\gamma_2}^{K,H} \tau_z ds = \int_{\gamma_1}^{H,K} \frac{t_1}{c} ds + \int_{\gamma_2}^{K,H} \frac{t_2}{c} ds \end{aligned}$$

e di qui

$$(15) \quad t_1 \int_{\gamma_1}^{H,K} \frac{1}{c} ds + t_2 \int_{\gamma_2}^{K,H} \frac{1}{c} ds - 2GS_{12} \vartheta = 0 .$$

Applicando il teorema di *Stokes* alla superficie S_{13} delimitata dalla curva chiusa costituita da γ_1 e γ_3 (fig. 18) si ottiene

$$\begin{aligned} 2G\vartheta S_{13} &= 2G\vartheta \int_{S_{13}} d\sigma = \int_{S_{13}} 2G\vartheta d\sigma = \int_{S_{13}} \text{rot}\boldsymbol{\tau}_z d\sigma = \int_{S_{13}} (\text{rot}\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{n}) d\sigma = \\ &= \int_{\gamma_1}^{H,K} (\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{t}) ds + \int_{\gamma_3}^{K,H} (\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{t}) ds = \int_{\gamma_1}^{H,K} \tau_z ds + \int_{\gamma_3}^{K,H} \tau_z ds = \int_{\gamma_1}^{H,K} \frac{t_1}{c} ds + \int_{\gamma_3}^{K,H} \frac{t_3}{c} ds \end{aligned}$$

e di qui

$$(16) \quad t_1 \int_{\gamma_1}^{H,K} \frac{1}{c} ds + t_3 \int_{\gamma_3}^{K,H} \frac{1}{c} ds - 2GS_{13} \vartheta = 0 .$$

Le (9), (13), (15), (16) costituiscono il sistema risolvete per la sezione sottile tre volte connessa di fig. 9.

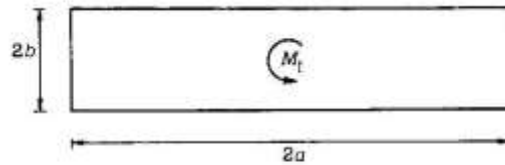


Fig. 19

2.3. La torsione della sezione rettangolare allungata.

Studiamo la torsione di una trave avente per sezione retta un rettangolo allungato (fig. 19). La lunghezza del lato lungo è $2a$; quella del lato corto $2b$. Ricaveremo ora, impiegando l'analogia idrodinamica, delle espressioni per τ_z e per ϑ , che sono tanto più precise quanto a è maggiore di b (cioè quanto più il rettangolo è allungato). È noto dalla *Fluidodinamica* che per la sezione di fig. 18 i percorsi delle particelle fluide (e quindi le linee di corrente) sono quelli indicati in fig. 19, e che nel centro del rettangolo la velocità (e quindi τ_z) è nulla. Poiché $\boldsymbol{\tau}_z$ è in ogni punto P di A tangente alla linea di corrente passante per P , ne risulta che, se il rettangolo è molto allungato, τ_z è parallela al lato lungo (praticamente) in ogni punto del rettangolo. Pertanto, introdotto il riferimento di fig. 20, risulta

$$(17) \quad \tau_z = 0 \quad \text{in } A .$$

Dall'ipotesi che il rettangolo è molto allungato segue (in *Fluidodinamica*) che \mathbf{v} e quindi anche $\boldsymbol{\tau}_z$ non dipende da y . Da ciò e dal fatto che nel centro O del rettangolo τ_z è nulla, risultando per la (32) del cap. 12 e per la (17)

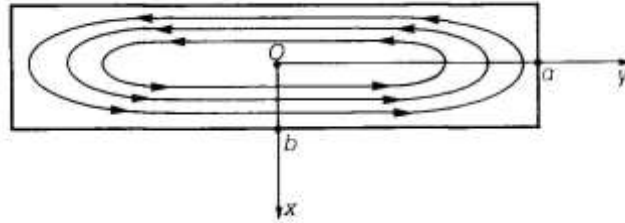


Fig. 20

$$2G\vartheta = \text{rot}\boldsymbol{\tau}_z = \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial x},$$

segue

$$(18) \quad \tau_{zy} = 2G\vartheta x .$$

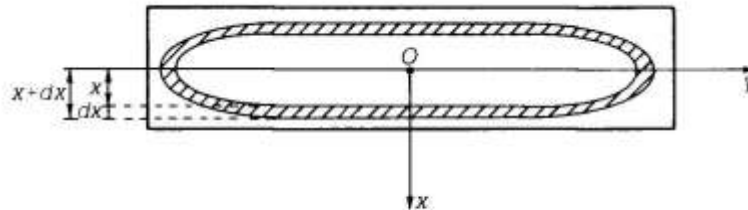


Fig. 21

Ricaviamo ora dalla (18), con una condizione di equilibrio, un'espressione della τ_z in funzione del momento torcente. Per il principio di sezionamento, il sistema delle τ_z distribuite sull'area A della sezione retta equivale al sistema costituito dalla sola coppia torcente M_t . Consideriamo ora il tubo di flusso costituito dalla linea di corrente individuata dalla coordinata x maggiore di 0 e minore di b e dalla linea di corrente individuata dalla coordinata $x + dx$, con dx piccolo quanto ci piaccia (fig. 21). Denotiamo con dA l'area (piccolissima) del tubo di flusso (di fig. 21), con ∂dA il contorno di dA e con dM il momento rispetto ad O delle τ_z (di componenti (17) e (18)) distribuite su dA . Poiché ogni punto di dA è anche punto di A , è ovvio che

$$\begin{aligned} \text{div}\boldsymbol{\tau}_z &= 0 & \text{in } dA \\ \text{rot}\boldsymbol{\tau}_z &= 2G\vartheta & \text{in } dA . \end{aligned}$$

Poiché ∂dA sono due linee di corrente, è ovvio che

$$\boldsymbol{\tau}_z \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{in } \partial dA$$

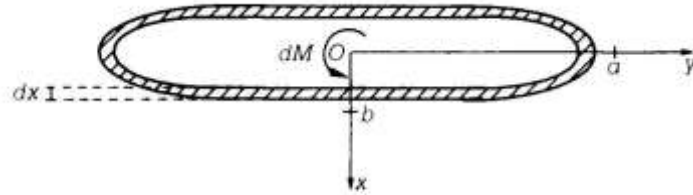


Fig. 22

Pertanto, il sistema delle τ_z distribuite su dA coincide col sistema delle τ_z che nascono nella sezione sottile chiusa due volte connessa dA sottoposta al momento torcente dM (fig. 22). Quindi per la formula di *Bredt*, le (17) e (18) si ha

$$(19) \quad \tau_{zy} = \tau_z = \frac{dM}{2 \Omega dx} .$$

Nella (19), se il rettangolo è molto allungato, l'area racchiusa nella fibra media del tubo di flusso di fig. 22 è bene approssimata dall'area del rettangolo di base $2a$ e altezza $2x$. Conseguentemente, tenendo conto della (18)

$$dM = 2 G \vartheta x \cdot 2 \cdot 2a \cdot 2x \cdot dx = 16G\vartheta ax^2 dx .$$

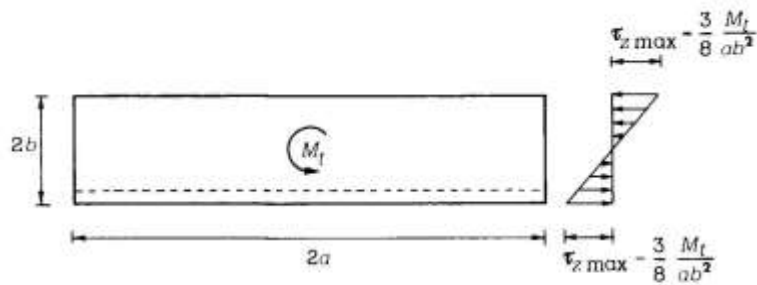


Fig. 23

Così

$$M_t = \int dM = \int_0^b 16G\vartheta ax^2 dx = 16G\vartheta a \frac{b^3}{3}$$

e di qui

$$(20) \quad \vartheta = \frac{3}{16 G} \frac{M_t}{ab^3}$$

nonché, tenendo conto della (18)

$$(20) \quad \tau_{zy} = \frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^3} x$$

che diagrammiamo in fig. 23.

OSSERVAZIONE 3. Ritroviamo la (20) a partire dalla (21), eguagliando il lavoro di deformazione L all'integrale (esteso al volume V della trave) del potenziale elastico φ . Procedendo nel modo seguito per la sezione sottile chiusa due volte connessa, si ha⁸

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_t \vartheta l = L &= \int_V \varphi dV = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \tau_{zy} \gamma_{zy} dV = \frac{1}{2G} \int_V \tau_{zy}^2 dV = \frac{1}{2G} \int_0^l \left(\int_A \tau_{zy}^2 dA \right) dz = \frac{1}{2G} \int_0^l \left(\int_A \left(\frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^3} x \right)^2 dA \right) dz = \\ &= \frac{1}{2G} \left[\int_A \left(\frac{3}{8} \frac{M_t}{ab^3} x \right)^2 dA \right] \int_0^l dz = \frac{l}{2G} \int_A \frac{9}{64} \frac{M_t^2}{a^2 b^6} x^2 dA = \frac{9 l M_t^2}{128 G a^2 b^6} \int_A x^2 dA = \frac{9 l M_t^2}{128 G a^2 b^6} I_y = \\ &= \frac{9 l M_t^2}{128 G a^2 b^6} \cdot \frac{2a(2b)^3}{12} = \frac{9 l 16 a b^3 M_t^2}{128 G a^2 b^6 12} = \frac{3 l M_t^2}{32 G a b^3} \end{aligned}$$

e di qui

$$\vartheta = \frac{3}{16 G} \frac{M_t}{a b^3} .$$

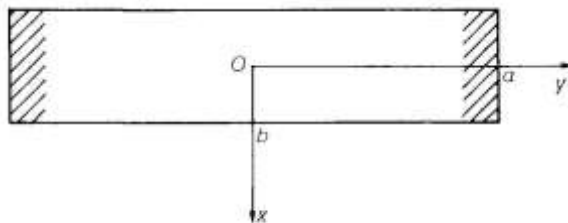


Fig. 24

OSSERVAZIONE 4. E' ovvio che le (17) e (21) approssimano lo stato tensionale nella sezione rettangolare allungata ovunque tranne che nei punti aventi y prossima a -a oppure ad a (fig. 24).

2.4. La torsione dei profilati.

Consideriamo ora (fig. 25) il problema della torsione per un profilato⁹ avente per sezione retta una sezione ad

⁸ Il momento di inerzia di un rettangolo rispetto alla parallela baricentrica alla base è pari alla base moltiplicata per il cubo dell'altezza (del rettangolo) e divisa per 12 (cap. 11).

⁹ Cioè una trave metallica (a sezione costante) ottenuta al laminatoio.

I (che è anche detta a doppio T). Per tale sezione retta è noto dalla *Fluidodinamica* che i percorsi delle particelle fluide (e quindi le linee di corrente) e i diagrammi delle velocità sono quelli indicati in fig. 26. Denotiamo con M_1 il momento del sistema delle τ_z distribuite sul rettangolo $ABCD$, con M_2 quello del sistema delle τ_z distribuite sul rettangolo $EFMN$, con M_3 quello del sistema delle τ_z distribuite sul rettangolo $LGHI$ ¹⁰. Sezioniamo la trave di fig. 25 con il piano individuato dall'asse della trave e dalla corda EN (fig. 26) e con il piano individuato dall'asse della trave e dalla corda FM (fig. 26). Ne risultano le tre mensole a sezione

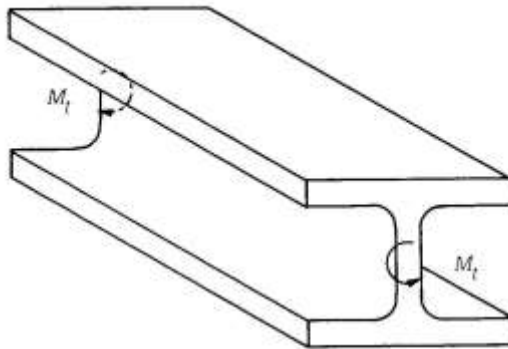


Fig. 25

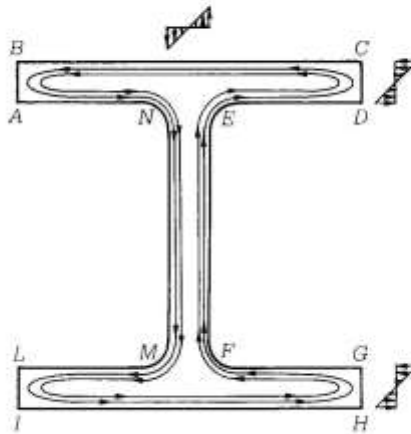


Fig. 26

¹⁰ I diagrammi delle velocità di fig. 26 assicurano, per l'analogia idrodinamica, che il sistema delle τ_z distribuite sul rettangolo $ABCD$ (oppure sul rettangolo $EFMN$, oppure sul rettangolo $LGHI$) ha risultante nulla.

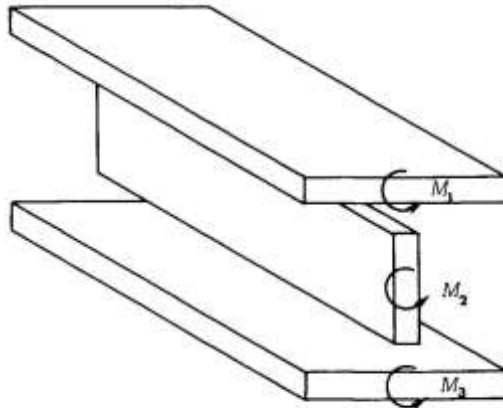


Fig. 27

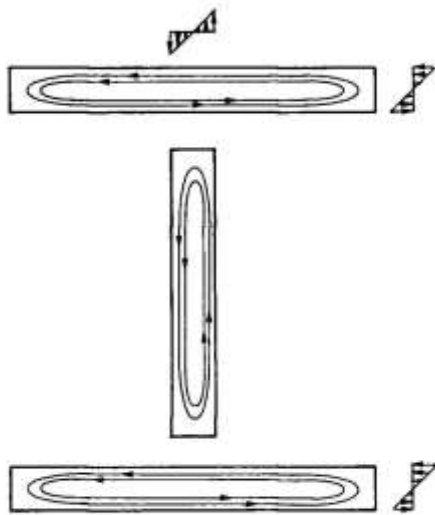


Fig. 28

rettangolare allungata di fig. 27. Applichiamo sulla mensola superiore il momento torcente M_1 , su quella intermedia il momento torcente M_2 , su quella inferiore il momento torcente M_3 (fig. 27). Se nelle mensole di fig. 27 applichiamo sulle zone di sezionamento le σ e τ esistenti nella trave di fig. 25, la mensola di fig. 25 e quelle di fig. 27 si deformano allo stesso modo (e quindi hanno lo stesso stato tensionale). Dalle (23) del cap. 12 segue facilmente che le σ agenti sui piani di sezionamento in fig. 25 sono ovunque nulle, e dalla simmetria delle τ segue subito che le τ agenti sui piani di sezionamento in fig. 25 non sono identicamente nulle. Però i risultati ottenuti nell'analizzare la torsione della sezione rettangolare allungata assicurano che nei rettangoli allungati che costituiscono le sezioni rette delle mensole di fig. 27 i percorsi delle particelle fluide (e quindi le linee di corrente) e i diagrammi delle τ_z sono quelli indicati in fig. 28. Pertanto se sulle mensole di fig. 27 si applicano solo i momenti torcenti M_1, M_2, M_3 si ottengono delle distribuzioni di τ_z che

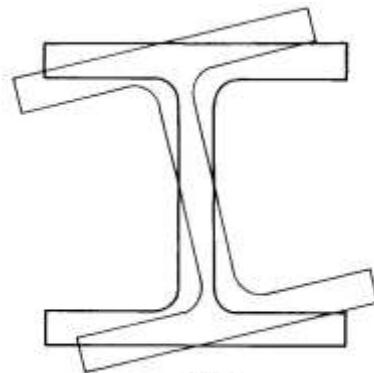


Fig. 29

approssimano soddisfacentemente, tranne che in prossimità delle corde EN e FM , la distribuzione di τ_z di fig. 26. Perciò, approssimiamo la soluzione del problema di fig. 25 con quella del problema di fig. 27 in cui sulle mensole sono applicati solo i momenti torcenti M_1, M_2, M_3 . Per determinare M_1, M_2, M_3 imponiamo che la soluzione da essi determinata (per il problema di fig. 27) sia equilibrata e congruente anche per il problema di fig. 25. Pertanto deve essere (condizione di equilibrio)

$$(22) \quad M_1 + M_2 + M_3 = M_t .$$

Inoltre, denotiamo con ϑ l'angolo unitario di torsione della mensola di fig. 25, con ϑ_1 quello della mensola superiore di fig. 27, con ϑ_2 quello della mensola intermedia di fig. 27, con ϑ_3 quello della mensola inferiore di fig. 27 e assumiamo che la sezione retta di ascissa z (si ingobba e) ruota rigidamente (nel suo piano) dell'angolo ϑz (cap. 12). Pertanto, perché non vi siano lacerazioni e/o sovrapposizioni di materiale in corrispondenza delle corde EN e FM (fig. 26), detta z l'ascissa di una sezione (generica) della trave deve essere (condizione di congruenza) (fig. 29) $\vartheta_1 z = \vartheta_2 z$, $\vartheta_1 z = \vartheta_3 z$ e di qui

$$(23) \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 \quad , \quad \vartheta_1 = \vartheta_3 \quad .$$

Dalle (23) e (20) si ottengono le relazioni (fig. 30)

$$\frac{3}{16 G} \frac{M_1}{a_1 b_1^3} = \frac{3}{16 G} \frac{M_2}{a_2 b_2^3} \quad , \quad \frac{3}{16 G} \frac{M_1}{a_1 b_1^3} = \frac{3}{16 G} \frac{M_3}{a_3 b_3^3}$$

cioè

$$(24) \quad \frac{M_1}{a_1 b_1^3} = \frac{M_2}{a_2 b_2^3}$$

$$(25) \quad \frac{M_1}{a_1 b_1^3} = \frac{M_3}{a_3 b_3^3} .$$

Le (22), (24) e (25) costituiscono un sistema risolvete (algebrico, lineare, di tre equazioni nelle tre incognite M_1, M_2, M_3 ¹¹) per la trave di fig. 25.

.....
¹¹ È facile verificare che la sua matrice dei coefficienti è non singolare; conseguentemente esso ammette una e una sola soluzione.

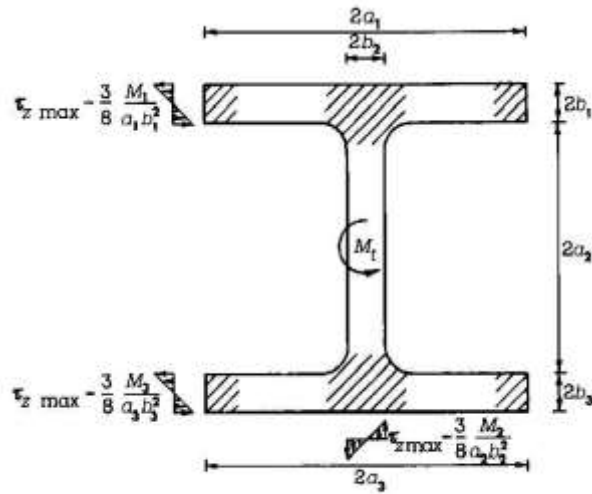


Fig. 30

Determinati M_1, M_2, M_3 , dalle (21) e (20) si ottengono (per il problema di fig. 25) le τ_z (fig. 30) e

$$\vartheta = \vartheta_1 = \frac{3}{16} \frac{M_1}{G a_1 b_1^3}.$$

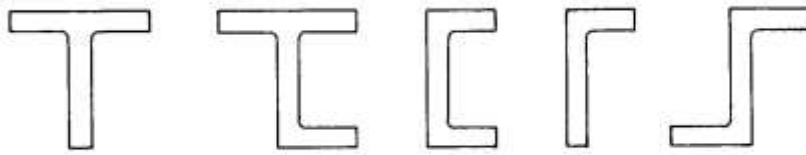


Fig. 31

OSSERVAZIONE 5. Dalle figg. 26 e 28 segue ovviamente che la soluzione di fig. 30 non è attendibile in corrispondenza delle corde EN e FM (fig. 26). L'osservazione 3, ovviamente, sussiste. Pertanto le parti di sezione tratteggiate in fig. 30 non sono descritte da questa teoria tecnica.

Questa (semplice) tecnica risolutiva si può adattare a qualsiasi profilato composto da sezioni rettangolari allungate. Per alcune sezioni di frequente impiego (fig. 31) diamo le linee di corrente (fig. 32) e la

conseguente decomposizione in rettangoli allungati (fig. 33).

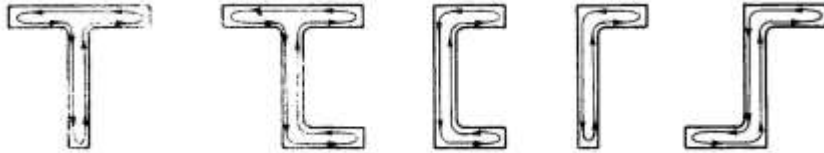


Fig. 32

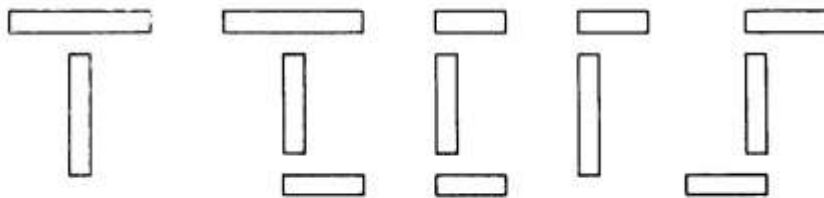


Fig. 33

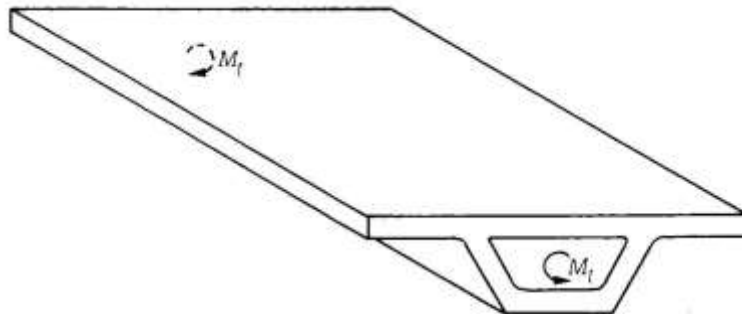


Fig. 34

OSSERVAZIONE 6. Il metodo di calcolo esposto per i profilati può essere impiegato anche per altri tipi di sezione sottile. Infatti consideriamo la trave a parete sottile di fig. 34. Per la sua sezione retta (fig. 35) la *Fluidodinamica* fornisce i percorsi delle particelle fluide (e quindi le linee di corrente) e i diagrammi di velocità di fig. 36. Ragionando come per la sezione ad *I* di fig. 26, consideriamo la distribuzione delle τ_z che nascono nella sezione di fig. 35 quando viene applicato il momento torcente M_t ; denotiamo con M_1, M_2, M_3 i