CAPITOLO 7

STATI PIANI DI DEFORMAZIONE E DI TENSIONE*

1. Problemi di deformazione piana

Siano V la porzione di spazio occupata da un corpo e *O,x,y,z* un riferimento cartesiano ortogonale. Si dice che il corpo è in stato di *deformazione piana* di piano *x,y* quando accade che $\forall (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in V$

$$
\begin{aligned}
& u(x,y,z_1) = u(x,y,z_2) \\
& v(x,y,z_1) = v(x,y,z_2) \\
& w(x,y,z_1) = 0\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

OSSERVAZIONE 1. Dalla [28] del cap. 2 segue facilmente che se un corpo è in stato di deformazione piana allora in ogni punto del corpo lo stato di deformazione è piano.

In molti importanti problemi il corpo è praticamente in stato di deformazione piana. Ne sono esempi le dighe a sezione prismatica (fig. 1); i tunnel (fig. 2); i tubi in pressione[1].

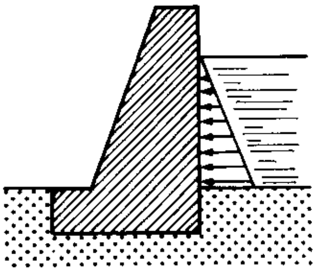

Fig. 1

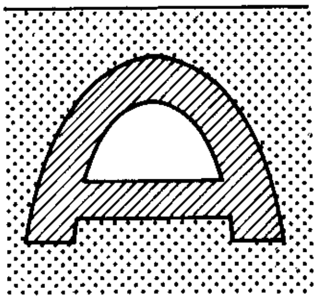

Fig. 2

----

* A. Maceri, *Stati piani di deformazione e di tensione*, e-ISBN 978-88-85929-37-1, © Accademica 1999

[1] Infatti in tali casi, potendosi ritenere praticamente infinita la lunghezza del corpo, ogni sezione retta è piano di simmetria geometrica e di carico. Ne segue, per il principio di simmetria della *Fisica*, che i punti di ogni sezione retta hanno spostamento longitudinale nullo.

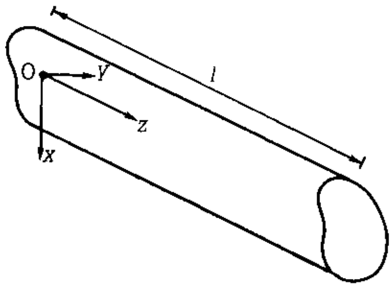

Fig. 3

Accade che i problemi di deformazione piana che si incontrano nella pratica sono praticamente tutti costituiti da un solido prismatico (fig. 3) molto lungo e sottoposto sul mantello ad un carico trasversale uniforme secondo l'asse del solido.

Prendiamo quindi in considerazione il problema dell'equilibrio elastico del corpo di fig. 3. Si tratta di un prisma retto di lunghezza l che occupa il volume V (dello spazio); ne denotiamo con S la superficie laterale. Il materiale è omogeneo, isotropo e linearmente elastico; le deformazioni sono, per ipotesi, piccole.

Il carico applicato sul prisma consiste in forze di massa $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ (trasversali e costanti lungo l'asse *z*, cioè) tali che $\forall (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in V$

(2)
$$\hat{X}(x,y,z_1) = \hat{X}(x,y,z_2)$$
$$\hat{Y}(x,y,z_1) = \hat{Y}(x,y,z_2)$$
$$\hat{Z}(x,y,z_1) = 0\,.$$

e in forze $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ distribuite sulla superficie laterale *S* (trasversali e costanti lungo l'asse *z*, cioè) tali che

(3)
$$\hat{p}_x(x,y,z_1) = \hat{p}_x(x,y,z_2)$$
$$\hat{p}_y(x,y,z_1) = \hat{p}_y(x,y,z_2)$$
$$\hat{p}_z(x,y,z_1) = 0\,.$$

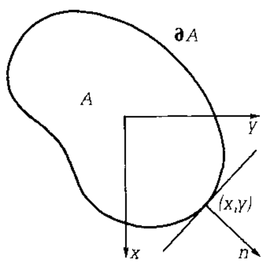

Fig. 4

Quanto al carico applicato sulle basi, si ha quanto segue. Denotiamo con A la (generica) sezione retta del prisma [2], con ∂A il suo contorno e, $\forall (x,y) \in \partial A$, con n_x, n_y i coseni direttori della normale (alla tangente) a ∂A in (x,y), (orientata) uscente da A (fig. 4).

Consideriamo il seguente problema

1) *Trovare tre funzioni*
$$\sigma_x(x,y)\,,\sigma_y(x,y)\,,\tau_{xy}(x,y)$$
tali che[3]

[2] *A* può presentare cavità (fig. 2).

[3] Poniamo
$$\forall \big((x,y),z\big) \in \partial A \times [0,l] \quad p_x(x,y) = \hat{p}_x(x,y,z_1)\,, p_y(x,y) = \hat{p}_y(x,y,z_1)$$
$$\forall (x,y,z) \in V \quad X(x,y) = \hat{X}(x,y,z_1)\,, Y(x,y) = \hat{Y}(x,y,z_1)\,.$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad su\ A$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad su\ A$$
$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad su\ A$$
$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = p_x \quad su\ \partial A$$
$$\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y = p_y \quad su\ \partial A\ .$$

Si dimostra[4] che il problema (4) ammette una ed una sola soluzione, che denotiamo con $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Ciò premesso, applichiamo sulla base di sinistra del prisma di fig. 3 le forze distribuite $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$

(5)
$$\begin{aligned} &\hat{p}_x(x,y,0) = 0 \quad \forall (x,y) \epsilon A \\ &\hat{p}_y(x,y,0) = 0 \quad \forall (x,y) \epsilon A \\ &\hat{p}_z(x,y,0) = -\nu\big[\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)\big] \quad \forall (x,y) \epsilon A\ . \end{aligned}$$

e sulla base di destra le forze (distribuite)

$$\begin{aligned} &\hat{p}_x(x,y,l) = 0 \quad \forall (x,y) \epsilon A \\ &\hat{p}_y(x,y,l) = 0 \quad \forall (x,y) \epsilon A \\ &\hat{p}_z(x,y,l) = -\nu\big[\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)\big] \quad \forall (x,y) \epsilon A\ . \end{aligned}$$

Con ciò il problema di fig. 3 è completamente precisato.
Si dimostra[4] che esistono due funzioni $u(x,y), v(x,y)$ tali che

(6)
$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \quad su\ A \\ &\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \quad su\ A \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad su\ A\ . \end{aligned}$$

Posto allora

(7)
$$\begin{aligned} &\hat{u}(x,y,z) = u(x,y) \qquad \forall\big((x,y),z\big) \in A \times [0,l] \\ &\hat{v}(x,y,z) = v(x,y) \qquad \forall\big((x,y),z\big) \in A \times [0,l] \\ &\widehat{w}(x,y,z) = 0 \qquad \forall (x,y,z) \in V\ , \end{aligned}$$

[4] Nella *Teoria matematica dell'elasticità.*

qui di seguito proviamo che le (7) sono soluzione del problema dell'equilibrio elastico di fig. 3; ne conseguirà immediatamente che il problema di fig. 3 è un problema di deformazione piana. Dalle (7) si trae che

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\varepsilon}_x(x,y,z)=\varepsilon_x(x,y)\\ &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\varepsilon}_y(x,y,z)=\varepsilon_y(x,y)\\ &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\gamma}_{xy}(x,y,z)=\gamma_{xy}(x,y)\ , \end{aligned}$$

$$(9)\qquad \hat{\varepsilon}_z=0\,,\qquad \hat{\gamma}_{xz}=0\,,\qquad \hat{\gamma}_{yz}=0\qquad in\ \ V\ \ ;$$

pertanto

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\sigma}_x(x,y,z)=\sigma_x(x,y)\\ &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\sigma}_y(x,y,z)=\sigma_y(x,y)\\ &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\tau}_{xy}(x,y,z)=\tau_{xy}(x,y)\ , \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\forall\big((x,y),z\big)\in A\times[0,l] && \hat{\sigma}_z(x,y,z)=\nu\left[\sigma_x(x,y)+\sigma_y(x,y)\right]\\ &\forall(x,y,z)\in V && \hat{\tau}_{xz}(x,y,z)=0\\ &\forall(x,y,z)\in V && \hat{\tau}_{yz}(x,y,z)=0\ . \end{aligned}$$

Verifichiamo che le (7) costituiscono una soluzione equilibrata del problema (3). Dalle (4), (10), (11) segue facilmente che le equazioni indefinite dell'equilibrio sono soddisfatte. Ai limiti, si ha che in ogni punto di S è $n_z = 0$; ne consegue, tenendo conto delle (4), (10), (11), (3) e della [3], che le equazioni di *Cauchy* sono soddisfatte su S . Inoltre, in ogni punto della base di sinistra risulta $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = -1$; pertanto, tenendo conto delle (11) e (5), le equazioni ai limiti di *Cauchy* sono soddisfatte sulla base di sinistra. Allo stesso modo si verifica che le equazioni ai limiti di *Cauchy* sono soddisfatte sulla base di destra. Così le (7) costituiscono una soluzione equilibrata del problema (3). Poiché le (7) sono una terna (regolare) di componenti dello spostamento, esse sono una soluzione congruente del problema (3). Ne consegue che le (7) sono la (unica[5]) soluzione del problema (3).

Quindi il problema (3) è un problema di deformazione piana. Per determinare la soluzione $\hat{\sigma}_x\,,\hat{\sigma}_y\,,\hat{\sigma}_z\,,\hat{\tau}_{xy}\,,\hat{\tau}_{xz}\,,\hat{\tau}_{yz}$ (in termini di tensioni) basta, per le (10) e (11), risolvere il problema bidimensionale (4). Qualora occorrano, dalle $\hat{\sigma}_x\,,\hat{\sigma}_y\,,\hat{\sigma}_z\,,\hat{\tau}_{xy}\,,\hat{\tau}_{xz}\,,\hat{\tau}_{yz}$ si ottengono immediatamente le $\hat{\varepsilon}_x\,,\hat{\varepsilon}_y\,,\hat{\varepsilon}_z\,,\hat{\gamma}_{xy}\,,\hat{\gamma}_{xz}\,,\hat{\gamma}_{yz}$ e di qui, per integrazione, le (7).

[5] Se il corpo è vincolato con un incastro puntuale (cap. 12) in uno dei suoi punti. Se il corpo non è vincolato il problema (3) ammette infinite soluzioni, due qualsiasi delle quali differiscono per un polinomio (in *x,y,z)* al più di primo grado (cioè per una rotazione rigida e/o per una traslazione rigida del corpo).

OSSERVAZIONE 2. La terza equazione del problema (4) equivale alla (equazione di congruenza)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} . \tag{12}$$

Supponiamo infatti vera la (12). Risultando $\hat{\sigma}_z = \nu(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y)$, si ha

$$\varepsilon_x = \hat{\varepsilon}_x = \frac{1}{E}\left[\hat{\sigma}_x - \nu(\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z)\right] = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\right] \tag{13}$$

$$\varepsilon_y = \hat{\varepsilon}_y = \frac{1}{E}\left[\hat{\sigma}_y - \nu(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z)\right] = \frac{1}{E}\left[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\right] \tag{14}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} . \tag{15}$$

Inoltre derivando la prima delle (4) rispetto a *x* e la seconda delle (4) rispetto a *y* e sommando si ottiene

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} . \tag{16}$$

Dalle (12), (13), (14), (15) e (16) segue allora

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y\right] + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x\right] =$$
$$= \frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) - \frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

e di qui

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}\right) + (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = 0$$

e di qui

$$\frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) . \tag{17}$$

Viceversa, supponiamo vera la (17). È facile provare che, allora, la (12) è vera.

OSSERVAZIONE 3. È ovvio (osservazione 2) che il problema (4) è la formulazione di un problema dell'equilibrio elastico (del corpo ideale di fig. 4) bidimensionale.

OSSERVAZIONE 4. Dalle (5) segue che sulle basi del prisma di fig. 3 è applicato un carico che ammette (in generale) risultante parallela all'asse *z*, momento rispetto all'asse *x* e momento rispetto all'asse *y* (fig. 3). Sono proprio le p_z applicate sulle basi a impedire gli spostamenti assiali (w = 0) e, con ciò, a tenere il prisma in stato di deformazione piana. Il problema del prisma di lunghezza finita sottoposto alle forze di massa (2) e, sulla superficie laterale, alle forze superficiali (3) e scarico sulle basi non è, in genere, un problema di deformazione piana. Se però il prisma è sufficientemente lungo (nel senso del postulato di *Saint Venant*[6]) la sua soluzione si può ottenere sommando alla soluzione (7) del problema di deformazione piana quella ottenuta da *Saint Venant*[6] per il prisma caricato, soltanto sulle basi, dalle forze (5).

[6] Cap. 12.

2. Problemi di tensione piana

Siano V la porzione di spazio occupata da un corpo e O,x,y,z un riferimento cartesiano ortogonale. Si dice che il corpo è in *stato di tensione piana* di piano x,y quando accade che $\forall\ (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in V$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x(x,y,z_1) = \sigma_x(x,y,z_2)\\
&\sigma_y(x,y,z_1) = \sigma_y(x,y,z_2)\\
&\sigma_z(x,y,z_1) = 0\\
&\tau_{xy}(x,y,z_1) = \tau_{xy}(x,y,z_2)\\
&\tau_{xz}(x,y,z_1) = 0\\
&\tau_{yz}(x,y,z_1) = 0\ .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

OSSERVAZIONE 5. È ovvio (cap. 3) che se un corpo è in stato di tensione piana allora in ogni punto del corpo lo stato di tensione è piano.

h

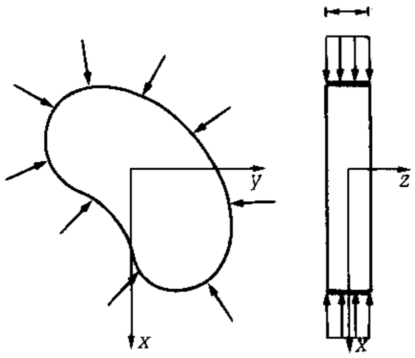

Fig. 5

Tenendo conto del fatto che il coefficiente di *Poisson* v è diverso da zero (cap. 5) è facile verificare che la sestupla di funzioni (18) non può (mai) essere soluzione di un (qualche) problema dell'equilibrio elastico. Quindi i problemi di tensione piana non si incontrano nella realtà fisica. Tuttavia esiste un problema di notevole interesse pratico, quello della *lastra* (piana o *pannello* piano), la cui soluzione soddisfa, con buona approssimazione, le (18). Chiamiamo lastra (o pannello) un cilindro retto V avente le basi parallele al piano x,y ed altezza h trascurabile rispetto alle dimensioni medie delle basi (fig. 5). Il materiale della lastra è omogeneo, isotropo e linearmente elastico; le deformazioni sono, per ipotesi, piccole. Denotiamo con A la (generica) sezione retta del cilindro[2], con ∂A il suo contorno e, $\forall (x,y) \in \partial A$, con $n_x\,,n_y$ i coseni direttori della normale (alla tangente) a ∂A in (x,y), (orientata) uscente da A (fig. 4).

Il carico applicato sulla lastra consiste in forze di massa $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$ (trasversali all'asse z e costanti lungo l'asse z, cioè) tali che $\forall\ (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in V$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{X}(x,y,z_1) = \tilde{X}(x,y,z_2)\\
&\tilde{Y}(x,y,z_1) = \tilde{Y}(x,y,z_2)\\
&\tilde{Z}(x,y,z_1) = 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

e in forze superficiali $\tilde{p}_x\,,\tilde{p}_y\,,\tilde{p}_z$ nulle sulle basi (fig. 5), sicché

$$\forall (x,y) \epsilon A \qquad \tilde{p}_x\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = \tilde{p}_y\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = \tilde{p}_z\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = = \tilde{p}_x\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = \tilde{p}_y\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = \tilde{p}_z\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = 0\,,$$

e distribuite sulla superficie laterale *S* del cilindro (trasversali all'asse z e costanti lungo l'asse z, cioè) tali che (fig. 5) $\forall\ (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in S$

$$\begin{aligned} &\tilde{p}_x(x,y,z_1) = \tilde{p}_x(x,y,z_2) \\ &\tilde{p}_y(x,y,z_1) = \tilde{p}_y(x,y,z_2) \\ &\tilde{p}_z(x,y,z_1) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Il piano x,y è evidentemente piano di simmetria geometrica e di carico per la lastra; pertanto, per il principio di simmetria, ogni punto del piano (medio) x,y della lastra ha (componente dello) spostamento secondo z pari a zero

$$w(x,y,0) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \in A\,.$$

In altri termini, ogni punto del piano medio della lastra resta, durante la deformazione, nel piano medio della lastra.

Si ammette nella pratica tecnica[7] che la lastra si trova in stato di tensione piana di piano x,y e precisamente che la (unica) soluzione del problema dell'equilibrio elastico della lastra sia con buona approssimazione tale che $\forall\ (x,y,z_1),(x,y,z_2) \in V$

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_x(x,y,z_1) = \tilde{\sigma}_x(x,y,z_2) \\ &\tilde{\sigma}_y(x,y,z_1) = \tilde{\sigma}_y(x,y,z_2) \\ &\tilde{\sigma}_z(x,y,z_1) = 0 \\ &\tilde{\tau}_{xy}(x,y,z_1) = \tilde{\tau}_{xy}(x,y,z_2) \\ &\tilde{\tau}_{xz}(x,y,z_1) = 0 \\ &\tilde{\tau}_{yz}(x,y,z_1) = 0\,. \end{aligned} \tag{21}$$

OSSERVAZIONE 6. La terza delle (21) si può giustificare col seguente ragionamento. Poiché le facce della lastra sono scariche, dalle equazioni ai limiti di *Cauchy* si ottiene facilmente

$$\forall (x,y) \epsilon A \qquad \tilde{\tau}_{zx}\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = \tilde{\tau}_{zy}\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = \tilde{\sigma}_z\left(x,y,-\frac{h}{2}\right) = 0 \tag{22}$$

$$\forall (x,y) \epsilon A \qquad \tilde{\tau}_{zx}\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = \tilde{\tau}_{zy}\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = \tilde{\sigma}_z\left(x,y,\frac{h}{2}\right) = 0\,. \tag{23}$$

Inoltre, dalla terza equazione indefinita dell'equilibrio e dalle (19) si trae

[7] I risultati conseguiti assumendo vere le (21) hanno sempre bene approssimato i valori sperimentali ottenuti nei *Laboratori prove materiali* e il comportamento delle realizzazioni strutturali.

(24) $$\frac{\partial\tilde{\tau}_{zx}}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial\tilde{\tau}_{zy}}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial\tilde{\sigma}_z}{\partial z}(x,y,z)=0 \qquad \forall(x,y,z)\in V\,.$$

Dalle (22) e (24) segue

(25) $$\frac{\partial\tilde{\sigma}_z}{\partial z}\left(x,y,-\frac{h}{2}\right)=0 \qquad \forall(x,y)\in A$$

e dalle (23) e (24)

(26) $$\frac{\partial\tilde{\sigma}_z}{\partial z}\left(x,y,\frac{h}{2}\right)=0 \qquad \forall(x,y)\in A\,.$$

Poiché h è (per ipotesi) piccolo, dalle (22), (25) e dalle (23), (26) segue con buona approssimazione che

$$\tilde{\sigma}_z(x,y,z)=0 \qquad \forall(x,y,z)\in V\,.$$

Consideriamo il seguente problema

(27) *Trovare tre funzioni* $\sigma_x(x,y)\,,\sigma_y(x,y)\,,\tau_{xy}(x,y)$ *tali che*[8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0 \qquad su\ A\\
&\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0 \qquad su\ A\\
&\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}=-(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad su\ A\\
&\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y=p_x \qquad su\ \partial A\\
&\tau_{yx}n_x+\sigma_y n_y=p_y \qquad su\ \partial A\,.
\end{aligned}$$

Si dimostra[4] che il problema (27) ammette una ed una sola soluzione che denotiamo con $\sigma_x\,,\sigma_y\,,\tau_{xy}$. Posto $\forall\big((x,y),z\big)\epsilon A\times[-h/2\,,h/2]$

(28) $$\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_x(x,y,z)=\sigma_x(x,y)\\
&\tilde{\sigma}_y(x,y,z)=\sigma_y(x,y)\\
&\tilde{\sigma}_z(x,y,z)=0\\
&\tilde{\tau}_{xy}(x,y,z)=\tau_{xy}(x,y)\\
&\tilde{\tau}_{xz}(x,y,z)=0\\
&\tilde{\tau}_{yz}(x,y,z)=0
\end{aligned}$$

è facile provare che le (28) soddisfano le (21) e sono una sestupla (di tensioni) equilibrata e (in via approssimata) congruente per il problema della lastra.

[8] Poniamo $\forall\big((x,y),z\big)\epsilon\partial A\times[-h/2\,,h/2]$ $\quad p_x(x,y)=\tilde{p}_x(x,y,z)\,,p_y(x,y)=\tilde{p}_y(x,y,z)\,;$
$\forall(x,y,z)\epsilon V \quad X(x,y)=\tilde{X}(x,y,z)\,,Y(x,y)=\tilde{Y}(x,y,z)\,.$

Infatti da un lato è ovvio che le (28) soddisfano le (21). Circa l'equilibrio, la quinta delle (28) e la prima delle (27) assicurano che

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial z} + \tilde{X} = 0 \qquad su\, V\ ;$$

la sesta delle (28) e la seconda delle (27) assicurano che

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial z} + \tilde{Y} = 0 \qquad su\, V\ ;$$

le (28) e (19) assicurano che

$$\frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_z}{\partial z} + \tilde{Z} = 0 \qquad su\, V\ ;$$

la quarta delle (27) e le (28) assicurano che

$$\tilde{\sigma}_x n_x + \tilde{\tau}_{xy} n_y + \tilde{\tau}_{xz} n_z = \tilde{p}_x \qquad su\, S\ ;$$

la quinta delle (27) e le (28) assicurano che

$$\tilde{\tau}_{yx} n_x + \tilde{\sigma}_y n_y + \tilde{\tau}_{yz} n_z = \tilde{p}_y \qquad su\, S\ ;$$

le (28) e le (20) assicurano che

$$\tilde{\tau}_{zx} n_x + \tilde{\tau}_{zy} n_y + \tilde{\sigma}_z n_z = \tilde{p}_z \qquad su\, S\ ;$$

le (28) e l'ipotesi che le facce della lastra sono scariche assicurano che sulla faccia $z = -h/2$ [risp. $z = h/2$]

$$\tilde{\sigma}_x n_x + \tilde{\tau}_{xy} n_y + \tilde{\tau}_{xz} n_z = \tilde{p}_x$$
$$\tilde{\tau}_{yx} n_x + \tilde{\sigma}_y n_y + \tilde{\tau}_{yz} n_z = \tilde{p}_y$$
$$\tilde{\tau}_{zx} n_x + \tilde{\tau}_{zy} n_y + \tilde{\sigma}_z n_z = \tilde{p}_z\ .$$

Pertanto la sestupla di tensioni (28) è equilibrata (internamente ed ai limiti). Circa la congruenza, dalle (28) si trae $\forall (x, y, z) \in V$

$$\tilde{\varepsilon}_x(x,y,z) = \frac{1}{E}\left[\sigma_x(x,y) - \nu\, \sigma_y(x,y)\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_y(x,y,z) = \frac{1}{E}\left[\sigma_y(x,y) - \nu\, \sigma_x(x,y)\right]$$
$$\tilde{\varepsilon}_z(x,y,z) = -\frac{\nu}{E}\left[\sigma_x(x,y) + \sigma_y(x,y)\right]$$
$$\tilde{\gamma}_{xy}(x,y,z) = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}(x,y)$$
$$\tilde{\gamma}_{xz}(x,y,z) = 0$$
$$\tilde{\gamma}_{yz}(x,y,z) = 0$$

e di qui segue

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}\right]$$

e, tenendo conto delle prime tre delle (27)

$$\frac{\partial^2\tilde{\gamma}_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right]=$$
$$-\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}\right)$$

sicché la prima equazione di congruenza è soddisfatta;

$$\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_z}{\partial y^2}=-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right),\qquad \frac{\partial^2\tilde{\gamma}_{yz}}{\partial y\partial z}=0$$

sicché la seconda equazione di congruenza non è soddisfatta;

$$\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_x}{\partial z^2}=-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right),\qquad \frac{\partial^2\tilde{\gamma}_{zx}}{\partial z\partial x}=0$$

sicché la terza equazione di congruenza non è soddisfatta;

$$2\,\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_x}{\partial y\partial z}=0\,,\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{\gamma}_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{\gamma}_{zy}}{\partial x}\right)=0$$

sicché la quarta equazione di congruenza è soddisfatta;

$$2\,\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_y}{\partial z\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{\gamma}_{yx}}{\partial z}-\frac{\partial\tilde{\gamma}_{xz}}{\partial y}\right)=0$$

sicché la quinta equazione di congruenza è soddisfatta;

$$2\,\frac{\partial^2\tilde{\varepsilon}_z}{\partial x\partial y}=-\frac{\nu}{E}\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tilde{\gamma}_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{\gamma}_{zy}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{\gamma}_{yx}}{\partial z}\right)=0$$

sicché la sesta equazione di congruenza non è soddisfatta.
Per la lastra si ammette che la seconda, terza e sesta equazione di congruenza siano soddisfatte con buona approssimazione[7]. Quindi il problema della lastra è (con buona approssimazione) un problema di tensione piana. Per determinarne la soluzione $\tilde{\sigma}_x\,,\tilde{\sigma}_y\,,\tilde{\sigma}_z\,,\tilde{\tau}_{xy}\,,\tilde{\tau}_{xz}\,,\tilde{\tau}_{yz}$ (in termini di tensioni) basta, per le (28), risolvere il problema bidimensionale (27).

3. **La funzione di Airy**

Se le forze di massa sono (ovunque) nulle[9], il problema di deformazione piana e quello di tensione piana sono (matematicamente) eguali. Infatti in tale ipotesi il problema (4) e il problema (27) coincidono col problema (fig. 4)

(29) *Trovare tre funzioni* $\sigma_x(x,y)\,,\sigma_y(x,y)\,,\tau_{xy}(x,y)$ *tali che*

[9] O almeno costanti.