

I CRITERI DI RESISTENZA *

1. Generalità.

Le considerazioni finora fatte e quelle che saranno fatte nel seguito hanno per scopo principale quello di consentire di stabilire se un (assegnato) corpo deformabile sottoposto a un sistema di forze è oppure no in sicurezza. Ovviamente l'espressione «in sicurezza» ha un significato che varia (anche notevolmente) da caso a caso, dipendentemente dall'impiego che viene fatto del corpo caricato. Così, verificare la sicurezza di una struttura può consistere nell'accertare che non c'è pericolo di rottura oppure nell'accertare che gli spostamenti di certi punti della struttura non superino dei valori prefissati.

Nel seguito ci occupiamo soltanto del problema della valutazione della capacità di resistenza della struttura. Allo stato attuale delle conoscenze, la *Fisica* (che si occupa di questa questione nell'ambito della *Struttura della materia*) non offre a questo proposito indicazioni che siano di una qualche utilità pratica. Ci avvaliamo pertanto di alcuni *criteri di resistenza*, basati su congetture semplici (e spesso ingiustificate) ma confortati da numerosissime conferme ottenute nei *Laboratori prove materiali* e nella pratica costruttiva. Si tratta di criteri che valutano la sicurezza in un (generico) punto del corpo. Peranto, per verificare la sicurezza di una struttura, occorre applicarli in ognuno dei suoi punti. Però, com'è ovvio, in pratica li si applica solo nei (pochi) punti nei quali si può ritenere che lo stato tensionale è più sfavorevole (cioè più prossimo alla crisi).

In sede di progetto si eseguono molte scelte, che ovviamente costituiscono altrettante approssimazioni (e quindi rendono imprecisa la valutazione della sicurezza strutturale). Inoltre, quando si determina lo stato tensionale della struttura, l'attendibilità dei valori ottenuti non dipende solo dall'accuratezza del metodo di calcolo adottato (per risolvere il problema dell'equilibrio elastico) ma anche dall'accuratezza con cui si è stimato il carico applicato sulla struttura e dalla precisione dei valori impiegati delle caratteristiche meccaniche del materiale. Perciò il valore della sigma di snervamento σ_0 del materiale viene scelto (dopo aver effettuato in *Laboratorio prove materiali* la prova a trazione su alcuni provini tutti eguali e tutti presi dalla stessa partita) con considerazioni di tipo probabilistico. La stessa cosa accade per le altre caratteristiche meccaniche del materiale e per i carichi che sollecitano la struttura.

* A. Maceri, *I criteri di resistenza*, e-ISBN 978-88-85929-39-5, © Accademica 1999

Il valore scelto per il carico F applicato sulla struttura viene quindi moltiplicato per un *coefficiente* (cautelativo) di *sicurezza* s (maggiore di 1). Lo stato tensionale in P è allora, per il principio di sovrapposizione degli effetti, pari a s volte lo stato tensionale causato in P dal carico F .

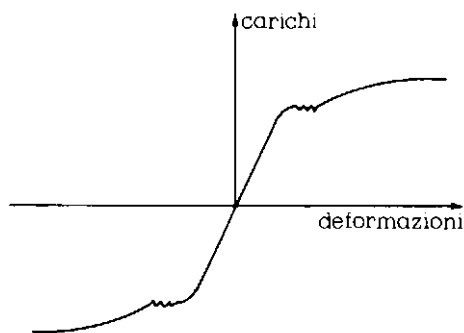


Fig. 1

OSSERVAZIONE 1. Quando si esegue la prova di rottura monoassiale a compressione, si verifica (in *Laboratorio prove materiali*) che alcuni materiali¹ presentano un diagramma carichi-deformazioni che è il simmetrico rispetto all'origine (fig. 1) di quello (di fig. 4 del cap. 5) della prova di trazione (sicché la sigma di snervamento a trazione e quella a compressione sono eguali in valore assoluto e hanno segno opposto) e che altri materiali hanno un diagramma carichi-deformazioni anche fortemente² asimmetrico rispetto all'origine.

A parte il criterio della curva intrinseca, i criteri di resistenza che seguono sono dati per materiali egualmente resistenti a trazione e a compressione¹ (nel senso della osservazione 1). Il criterio della curva intrinseca invece descrive bene il comportamento delle rocce e delle terre.

2. II criterio della massima tensione tangenziale.

Siano P un punto del corpo, α_n un piano per P , n la normale ad α_n , t_n il vettore sforzo (relativo ad α_n). Decomponiamo t_n nelle due componenti σ_n e τ_n (fig. 6 del cap. 3). Chiamiamo massima tensione tangenziale (nel punto P) e denotiamo col simbolo τ_{max} la più grande delle τ_n che si ottengono facendo variare α_n in tutti i modi possibili.

¹ Per esempio l'acciaio.

² Per esempio le murature resistono a compressione ma (praticamente) non a trazione.

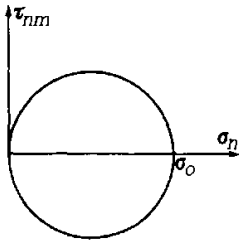


Fig. 2

Nell'osservazione 6 del cap. 3 abbiamo notato che τ_{max} è pari al raggio del massimo cerchio principale di *Mohr*. Pertanto, denotate con $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ le tre tensioni principali (in P), risulta

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\max\{\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta\} - \min\{\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta\}).$$

Denotiamo con τ_0 il valore di τ_{max} nella prova (monoassiale) a trazione in corrispondenza dello snervamento, sicché (fig. 2) (osservazione 5 del cap. 3)

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}.$$

Questo criterio (dovuto a *Tresca*³) assume come misura della crisi (in P) la massima tensione tangenziale τ_{max} e τ_0 come valore di crisi di τ_{max} . Quindi (in P) siamo in sicurezza se $s \tau_{max} \leq \tau_0$, cioè se

$$(1) \quad s (\max\{\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta\} - \min\{\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta\}) \leq \sigma_0.$$

3. Il criterio della tensione tangenziale ottaedrale.

Siano P un punto del corpo e $P(\xi, \eta, \zeta)$ un riferimento principale di tensione. Siano α_{ott} un piano per P ed n_ξ, n_η, n_ζ i coseni direttori della sua normale. Supponiamo⁴ che $n_\xi = n_\eta = n_\zeta = 1/\sqrt{3}$ (fig. 3). Sia t_{ott} il vettore sforzo relativo ad α_{ott} . Decomponiamo t_{ott} nelle due componenti σ_{ott} e τ_{ott} (fig. 6 del cap. 3), sicché

$$(2) \quad t_{ott}^2 = \sigma_{ott}^2 + \tau_{ott}^2.$$

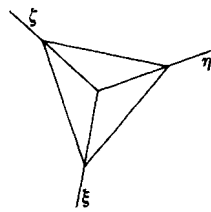


Fig. 3

Dalla (2), tenendo conto delle (5) e (7) del cap. 3, del fatto che ξ, η, ζ sono direzioni principali di tensione e dell'ipotesi $n_\xi = n_\eta = n_\zeta = 1/\sqrt{3}$, si

ottiene

$$\begin{aligned} \tau_{ott}^2 &= t_{ott}^2 - \sigma_{ott}^2 = t_{ott\xi}^2 + t_{ott\eta}^2 + t_{ott\zeta}^2 - \sigma_{ott}^2 = \\ &= (\sigma_\xi n_\xi)^2 + (\sigma_\eta n_\eta)^2 + (\sigma_\zeta n_\zeta)^2 - (\sigma_\xi n_\xi^2 + \sigma_\eta n_\eta^2 + \sigma_\zeta n_\zeta^2)^2 = \\ &= \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2}{3} - \left(\frac{\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{9} (3\sigma_\xi^2 + 3\sigma_\eta^2 + 3\sigma_\zeta^2 - \sigma_\xi^2 - \sigma_\eta^2 - \sigma_\zeta^2 - 2\sigma_\xi\sigma_\eta - 2\sigma_\xi\sigma_\zeta - 2\sigma_\eta\sigma_\zeta) = \end{aligned}$$

³ Henry Edouard Tresca, Dunkerque 1814 - Paris 1885.

⁴ L'ipotesi è corretta in quanto $\sigma_\xi n_\xi^2 + \sigma_\eta n_\eta^2 + \sigma_\zeta n_\zeta^2 = (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 = 1$.

$$= \frac{2}{9}(\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta})$$

sicché

$$\tau_{ott} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta})^{1/2}.$$

Denotiamo con τ_0 il valore di τ_{ott} nella prova (monoassiale) a trazione in corrispondenza dello snervamento, sicché, essendo in tale condizione $0,0,\sigma_0$ le tre tensioni principali, dalla (3) segue

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_0.$$

Questo criterio assume come misura della crisi (in P) la tensione tangenziale (ottaedrale) τ_{ott} insistente sul particolare piano α_{ott} e τ_0 come valore di crisi di τ_{ott} . Quindi (in P) siamo in sicurezza se $s \tau_{ott} < \tau_0$ cioè se

$$(3) \quad s(\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi}\sigma_{\zeta} - \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta})^{1/2} \leq \sigma_0.$$

4. Il criterio energetico.

Siano P un punto del corpo e $P(\xi, \eta, \zeta)$ un riferimento principale di tensione. Poniamo $T = \sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}$ e denotiamo con φ il potenziale elastico (in P). Dalla (16) del cap. 8 e tenendo conto del fatto che ξ, η, ζ sono direzioni principali di tensione risulta

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2E}[\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\zeta}^2 - 2\nu(\sigma_{\xi}\sigma_{\eta} + \sigma_{\xi}\sigma_{\zeta} + \sigma_{\eta}\sigma_{\zeta})] = \\ &= \frac{1}{2E}\left\{\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)^2 + \left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)^2 + \left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)^2 - 2\nu\left[\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)\left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)\left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right) + \left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)\left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\right)\right\} = \frac{1}{2E}\left\{\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3}\right)^2 + \left(\frac{T}{3}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{T}{3}\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3}\right) + \left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3}\right)^2 + \left(\frac{T}{3}\right)^2 + 2\frac{T}{3}\left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3}\right) + \left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3}\right)^2 + \left(\frac{T}{3}\right)^2 + 2\frac{T}{3}\left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3}\right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\nu\left[\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3}\right)\left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3}\right) + \frac{T}{3} \cdot \frac{T}{3} + \frac{T}{3}\left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3}\right) + \frac{T}{3}\left(\sigma_{\eta} - \frac{T}{3}\right) + \left(\sigma_{\xi} - \frac{T}{3}\right)\left(\sigma_{\zeta} - \frac{T}{3}\right) + \frac{T}{3} \cdot \frac{T}{3} + \right. \right. \end{aligned}$$